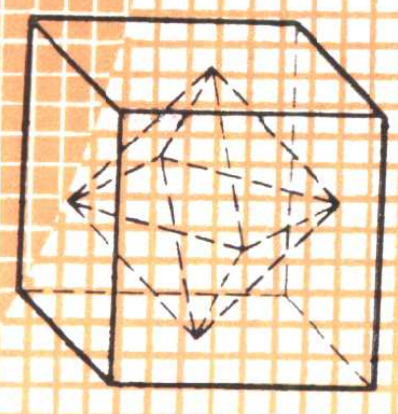
中等师范学校数学课本

几何

第一册



人民教育出版社

312625
312626
312627

封面设计：胡茂林

中等师范学校数学课本
（试用本）
几　何
第一册
汪述云　曹幼文　方　铨　编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装
*
开本787×1092 1/32　印张5.25　字数100,000
1984年5月第2版　1986年2月第5次印刷
印数892,001—1,102,000
书号K7012·0286　定价0.59元

本书是由教育部委托湖南省教育厅组织编写的．初稿完成后，教育部委托湖南省教育厅和人民教育出版社召集有北京、上海、河北、辽宁、吉林、江苏、浙江、福建、湖北等省、市代表参加的审稿会议，对初稿进行了审查．会后，由编者根据审查意见进行了修改。

在初中的平面几何里，我们研究了平面图形的一些基本性质和这些性质的应用．本书的一至三章是立体几何部分，它将在平面几何的基础上进一步研究空间图形的一些基本性质和这些性质的应用．第四章是几何中的逻辑知识初步，介绍有关几何中的逻辑知识的一些基本问题．

目　录

第一章　直线和平面……………………………………1

一　平面……………………………………1

二　空间两条直线……………………………………9

三　空间直线和平面……………………………………18

四　空间两个平面……………………………………32

第二章　多面体和旋转体……………………………………50

一　多面体和旋转体及其面积……………………………………50

二　多面体和旋转体的体积……………………………………89

第三章　多面角和正多面体……………………………………117

一　多面角及其性质……………………………………117

二　正多面体、多面体变形……………………………………123

第四章　几何中的逻辑知识初步……………………………………132

一　逻辑思维的基本规律……………………………………132

二　概念……………………………………136

三　命题……………………………………146

四　推理和证明……………………………………153

第一章　直线和平面

一　平　面

1.1　平面

桌面、黑板面以及平静的水面等，都给我们以平面的形像，但几何中所说的平面，是在空间无限延展着的。

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感觉它们象平行四边形。因此，我们通常都画平行四边形来表示平面(图 1-1 甲)。在用平行四边形表示水平平面时，通常把它的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍。如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，把被遮住的线条画成虚线或不画，这样看起来立体感就强些(图 1-1 乙丙)。

平面可用希腊字母 α、β、γ 等来表示，写作平面 α、β、γ等，也可以用平行四边形两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC (图 1-1 甲)。

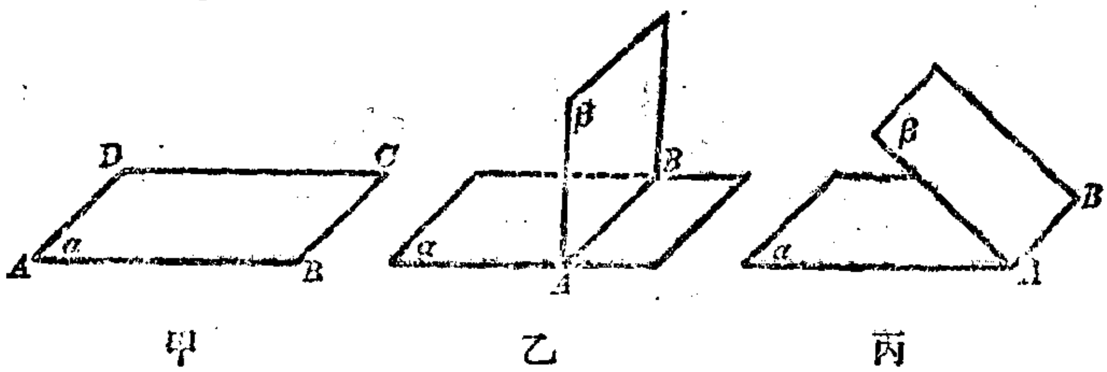


图　1-1

1.2 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出平面有以下三个基本性质，我们把它当作几何公理，作为进一步推理的基础.

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 1-2).

这时我们说直线在平面内*，或者说平面过直线.

直线可用小写拉丁字母 a、b、c 等表示，点用大写拉丁字母 A、B、C 等表示.

点 A 在直线 a 上，可记作 $A\in a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

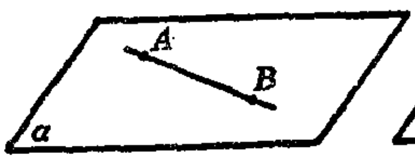


图 1-2

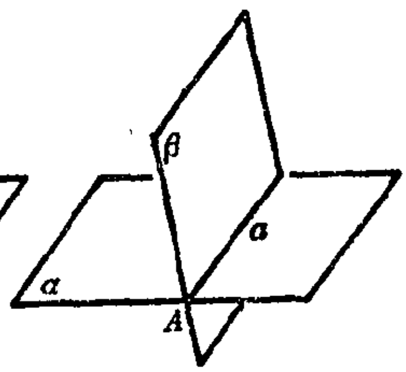


图 1-3

公理2 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这个点的一条直线(图 1-3).

例如，教室内相邻两墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这点的一条直线.

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，可记作 $\alpha\cap\beta=a$.

---

* 也说直线在平面上.

公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面(图 1-4).

这时，我们也说“不在同一直线上的三点确定一个平面.”例如，一扇门用两个枢轴和一把锁就可以固定了. 过 A、B、C 三点的平面可记作“平面 ABC”.

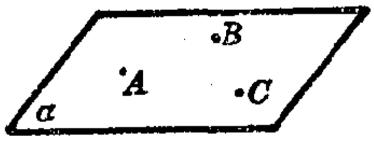


图　1-4

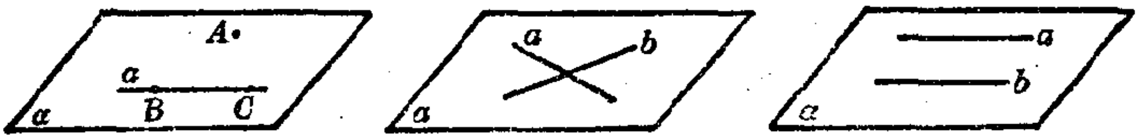
推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

如图 1-5 甲，A 是直线 a 外的一点，在 a 上取两点 B、C，经过这三点有且只有一个平面 α，又因 B、C 在 α 内，所以 a 在 α 内，因此，经过 a 和 A 有且只有一个平面.

同样，可以得出下面两个推论：

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(图 1-5 乙).

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 1-5 丙).



甲　　　　乙　　　　丙

图　1-5

注意：在立体几何中，对于同一平面内的图形，平面几何中的定义、公理、定理仍成立.

例　一条直线和两条平行直线相交，求证：这三条直线在同一平面内.

已知：直线 $a \parallel b$，直线 c 和 a 相交于 A，和 b 相交于 B（图 1-6）.

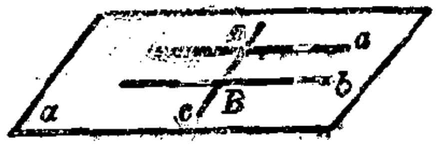


图 1-6

求证：a、b、c 在同一平面内.

证明：$\because$ $a \parallel b$,

$\therefore$ a、b 确定一个平面 α（推论 3）.

$\because$ $A \in \alpha$, $B \in \alpha$,

$\therefore$ $c \subset \alpha$（公理 1）.

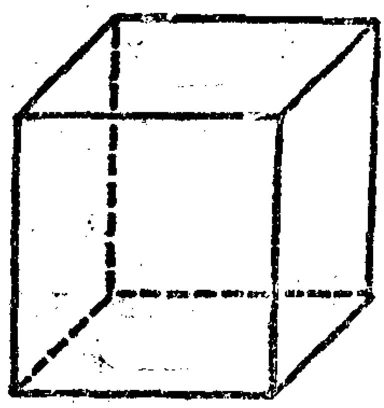
因此，三条直线 a、b、c 在同一平面 α 内.

练　习

1. 画两个水平平面 α 和 β，在平面 α 内画两条相交于点 A 的直线 c 和 d，在平面 β 内画两条平行直线 l 和 m.
2. 画两个相交的平面，并且在图中注上字母.
3. 任意三点能否确定一个平面？任意一点和一条直线呢？

1.3　水平放置的平面图形的直观图

空间图形是由空间的点、线、面所构成的图形．为了研究的需要，这种空间图形常按照某些规则，用画在一个平面内的图形来表示．由于规则的不同，画在平面内的图形也不一样．我们这里介绍一种直观图．如图 1-7，就是正方体的一种直观图，正方体的各个面本来都是正方形，但


图 1-7

在直观图上却有一些面画成了平行四边形．直观图虽然是平

面内的图形，不是空间图形的真实形状，但给予我们空间图形的感觉.

要画空间图形的直观图，首先必须掌握水平放置的平面图形直观图的画法，下面学习两种常用的画法——斜二测画法和正等测画法.

一、斜二测画法的规则:

1. 在图形上取互相垂直的 x 轴、y 轴，把它画成对应的 x′ 轴、y′ 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$ (或 135°)，两个轴确定的平面表示水平平面.

2. 图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段*，分别画成平行于 x′ 轴或 y′ 轴的线段.

3. 平行于 x 轴的线段，长度不变；平行于 y 轴的线段，长度变为原来的一半.

下面举例说明具体画法.

例 1 画正六边形的直观图.

画法: 1) 在正六边形 $ABCDEF$ 上，取对角线 AD 为 x 轴，对称轴 GH 为 y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$ (或 135°).

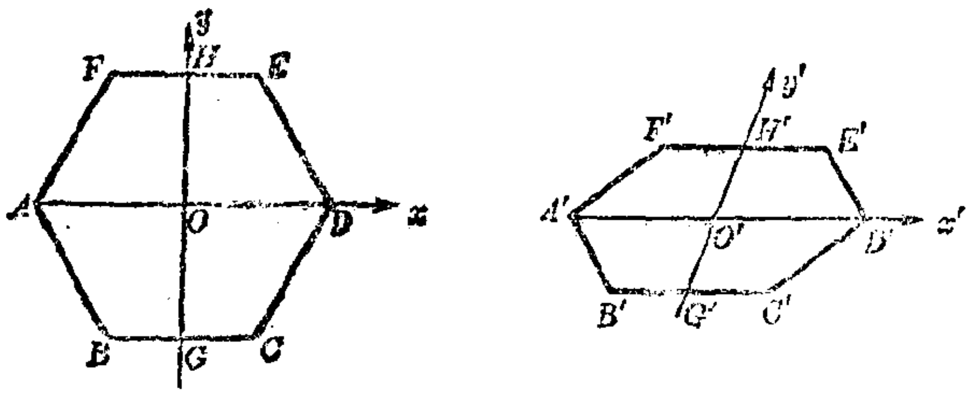


图 1-8

* 包括在轴上的线段.

2）以 O' 为中点，取 $A'D'=AD$ 和 $G'H'=\frac{1}{2}GH$；以 H' 为中点画 $F'E' \parallel x'$ 轴，并使 $F'E'=FE$，再以 G' 为中点画 $B'C' \parallel x'$ 轴，并使 $B'C'=BC$.

3）连结 $A'B'$、$C'D'$、$A'F'$、$D'E'$，得正六边形 $ABCDEF$ 的直观图 $A'B'C'D'E'F'$.

注意：将图画好后，要擦去辅助线（见图 1-8）.

例 2 画正五边形的直观图.

画法：1）在正五边形 $ABCDE$ 内，取对角线 BE 为 x 轴，对称轴 FA 为 y 轴. 过 C、D 分别作 $CG \parallel y$ 轴，$DH \parallel y$ 轴，分别交 x 轴于 G 和 H. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$（或 $135°$）.

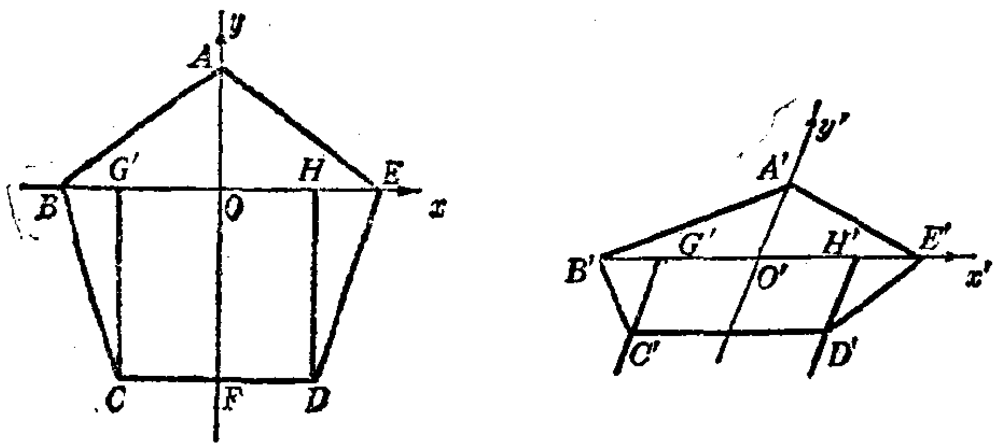


图 1-9

2）在 x' 轴上以 O' 为中点截取 $B'E'=BE$、$G'H'=GH$，在 x' 轴的同侧画线段 $C'G' \parallel y'$ 轴，$D'H' \parallel y'$ 轴，并使 $C'G'=\frac{1}{2}CG$，$D'H'=\frac{1}{2}DH$，在 x' 轴的另一侧，在 y' 轴上截取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$.

3）连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$。五边形$A'B'C'D'E'$就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图(见图 1-9).

二、正等测画法的规则:

正等测画法的规则与前一种所不同的，只是 $\angle x'O'y' = 60°$(或 120°);并且平行于 y 轴的线段长度不变,其他完全相同. 画含有圆的图形的直观图时,常用这种画法.

例 3 画圆的直观图.

画法: 1）在圆 O 上取一对互相垂直的直径 AB、CD分别为 x 轴、y 轴，画对应的 x'轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 60°$ (或 120°).

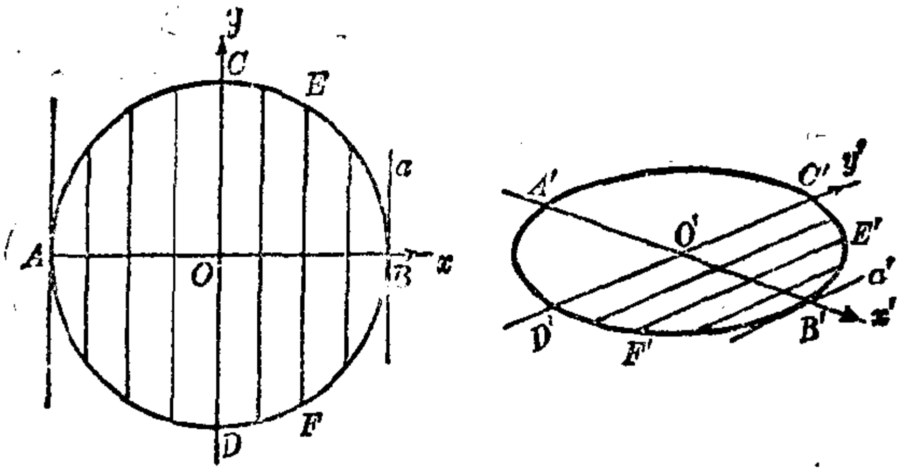


图 1-10

2）将圆 O 的直径 AB 分成 n 等分,过分点画平行于 y 轴的弦 CD、EF、…. 在 x' 轴上以 O' 为中点画线段 $A'B'$，使 $A'B' = AB$, 将 $A'B'$ 分成 n 等分,以分点为中点画 y' 轴的平行线段$C'D'$、$E'F'$、…, 使 $C'D' = CD$, $E'F' = EF$, ….

3）用平滑曲线连接 $A'D'F'B'E'C'$…，就得到圆的直观图,它是一个椭圆(见图 1-10).

可以看出,在这种画法中,圆的中心 O，变为椭圆的中心

O'，圆的一对互相垂直的直径(如 AB、CD)变为椭圆的一对直径（如 $A'B'$、$C'D'$）．它们叫做椭圆的共轭直径．圆的切线（如 a）变为椭圆的切线（如 a'）．

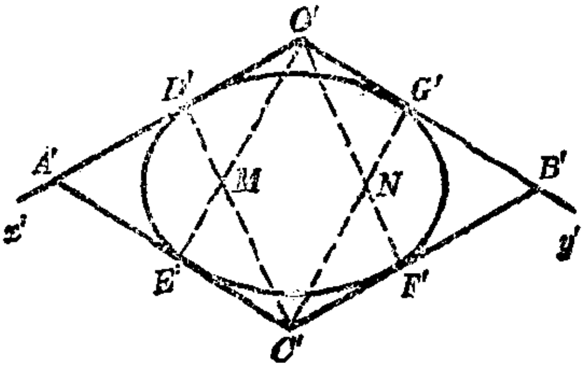


图 1-11

上面圆的直观图画法较繁，在实际画圆的直观图椭圆时，常采用椭圆的近似画法．它的步骤是：

1）作$\angle x'O'y'=120°$，分别在 $O'x'$ 和 $O'y'$ 上取 $O'A'$、$O'B'$ 等于圆 O 的直径．以 $O'A'$、$O'B'$ 为两邻边作菱形 $O'A'C'B'$．

2）取菱形各边中点 D'、E'、F'、G'．连结 $O'E'$ 和 $C'D'$ 交于 M，$O'F'$ 和 $C'G'$ 交于 N．

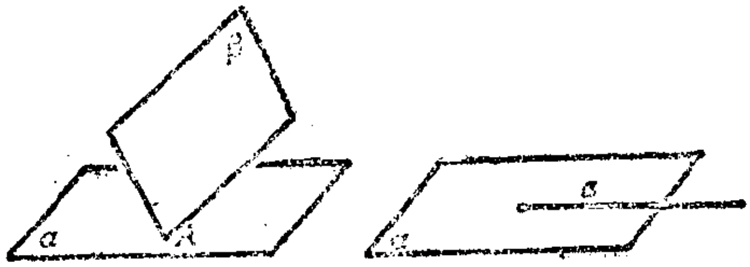
3）分别以 O'、C' 为圆心，$O'E'$ 为半径画弧，再分别以 M、N 为圆心，MD' 为半径画弧，就连接成近似椭圆(见图 1-11)．

练　习

1. 按斜二测画法分别画水平放置的正三角形、正方形的直观图．
2. 用椭圆的近似画法，画半径为 2 厘米的圆的直观图．

习　题　一

1. 如图所示，说平面 α 与平面 β 只有一个公共点 A(图甲)；直线 a 不全在平面 α 内(图乙)．这样说法对吗？为什么？



（第1题）

2. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？再举几个平面图形的例子.

3. 1）不在同一平面内的四个点，它们可确定几个平面？

   2）三条直线两两平行，但不在同一平面内，可确定几个平面？

   3）过一点的三条直线，不在同一平面内，可确定几个平面？

4. 过已知直线外一点与直线上三个点分别连结三条线段，证明：这三条线段在同一平面内.

5. 四条线段顺次首尾连接，所得封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

6. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？

7. 用斜二测画法分别画一个等腰梯形和一个任意四边形的直观图.

二　空间两条直线

1.4　两条直线的位置关系

在平面几何里我们学过，在同一平面内的两条不重合的

直线，它们的位置关系只有两种：平行或相交．对于空间的两条直线，它们的位置关系还有另外一种情况．例如图1-12，六角螺母的棱 AB 与 CD 所在直线，机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，它们都不在同一平面内．

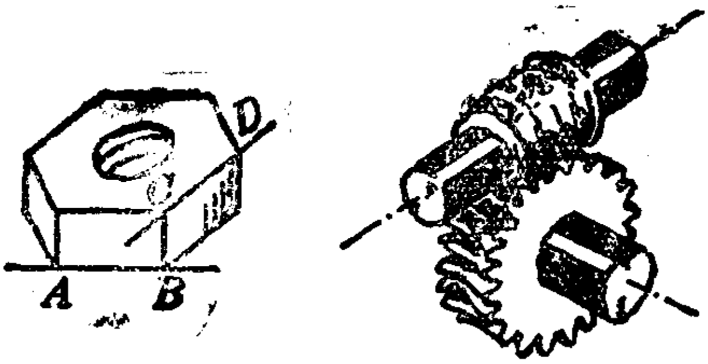


图 1-12

不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**．

因此，空间的两条不重合直线的位置关系有以下三种：

1. 相交直线——在同一平面内，只有一个公共点；
2. 平行直线——在同一平面内，没有公共点；
3. 异面直线——不在同一平面内，没有公共点．

两条异面直线不在同一平面内，没有公共点，因而，不相交也不平行．在画异面直线时，为了显示它们这种特点，常把两条直线画在不同的平面内，如图 1-13 甲、乙，而不画成丙图

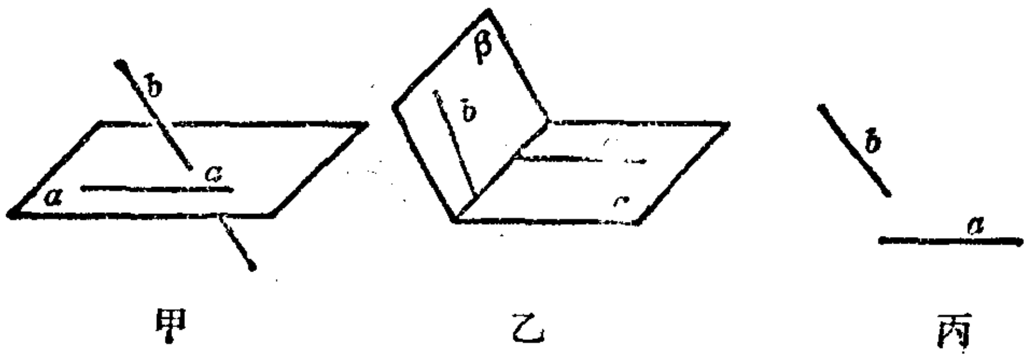


图 1-13

那样.

直线 a、b 相交于点 A, 可记作 $a\cap b=A$.

例 平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不过该点的直线成异面直线.

已知: 平面 α, 点 A、B 和直线 a, 且 $A\notin\alpha$, $B\in\alpha$, $B\notin a$, $a\subset\alpha$.

求证: 直线 AB 和 a 是异面直线.

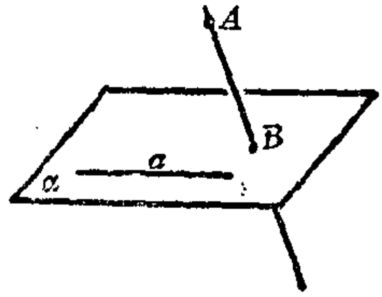


图 1-14

证明: 假设直线 AB 与 a 在同一平面内.

∵ $B\in AB$,

∴ 这个平面经过点 B 和直线 a.

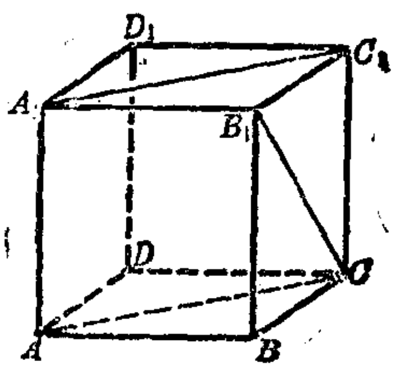
根据公理 3 的推论 1, 这个平面就是平面 α.

∴ $A\in\alpha$.

这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾, 所以直线 AB 与 a 异面.

练 习

1. 举出几个异面直线的例子.
2. 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线吗？为什么？
3. 如图所示的正方体里，指出下列各对直线的位置关系.
   1) AB 和 CC_1;
   2) A_1A 和 B_1C;
   3) A_1C_1 和 CB_1.



(第 3 题)

1.5 平行直线

在平面几何里,我们已经知道,在同一平面内,平行于同一直线的两条直线互相平行.对于空间的三条直线,也有这个性质,我们把它当作公理.

公理 4　平行于同一直线的两条直线互相平行.

例如三棱镜的三条棱或长方体的三条棱 $AA' \parallel BB'$, $CC' \parallel BB'$,这时 $AA' \parallel CC'$(图 1-15).

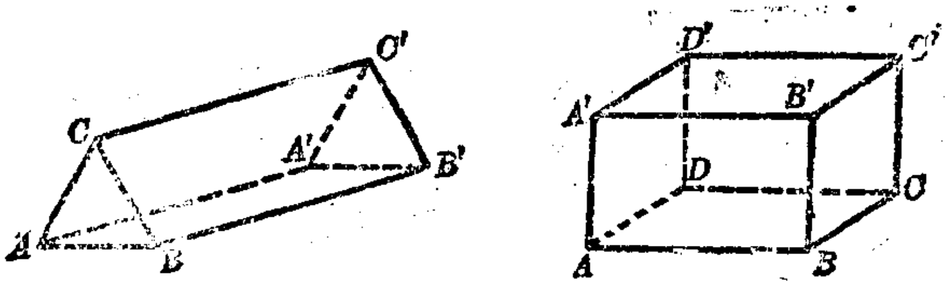


图　1-15

例　已知:四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不在同一平面内的四边形), E、H 分别是边 AB、AD 的中点, F、G 分别是边 BC、CD 上的点,且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$.

求证:四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明:如图 1-16,连结 BD,

EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore$　$EH \parallel BD$,

$$EH=\frac{1}{2}BD.$$

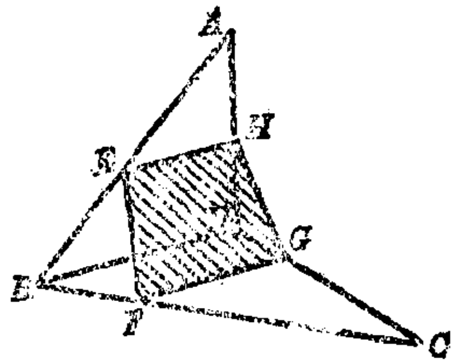


图　1-16

又在 $\triangle BCD$ 中,

$$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}.$$

$\therefore \quad FG \parallel BD, \ FG=\frac{2}{3}BD.$

根据公理 4, $EH \parallel FG$.

又 $\because \quad FG \neq EH,$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

下面我们研究一个与平面几何相同的定理:

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同, 那么这两个角相等.

已知: 如图 1-17, $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, 并且方向相同.

求证: $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明: 在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别取 $AD=A'D'$, $AE=A'E'$, 连结 AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$.

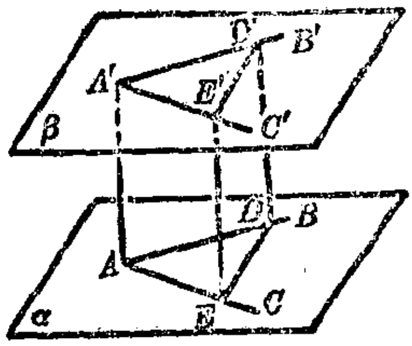


图 1-17

$\because \quad AB \parallel A'B', AD=A'D',$

$\therefore \quad AA'D'D$ 是平行四边形,

$\therefore \quad AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD'.$

同理 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$,

$\therefore \quad DD' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'.$

$EE'D'D$ 是平行四边形,

$\therefore \quad ED=E'D',$

$\triangle ADE \cong A'D'E'.$

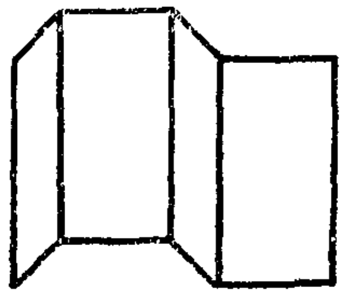
$\therefore \quad \angle BAC=\angle B'A'C'.$

作出上面两个角的两边的反向延长线, 就可以得出下面的推论:

推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

练 习

1. 如图，把一张长方形的纸对折两次，说明为什么这些折痕是互相平行的。



(第1题)

2. 已知：$BB' \underline{\parallel} AA'$，$CC' \underline{\parallel} AA'$，并且 AA'、BB'、CC' 不在同一平面内。求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

1.6 两条异面直线所成的角

设 a、b 是两条异面直线，根据上节推论，两条相交直线和另两条相交直线分别平行时，两组直线所成的锐角(或直角)相等．所以经过空间任一点 O，作 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，a' 和 b' 相交所成的锐角(或直角)大小不变.

经过空间任意一点 O，作直线 a'、b' 分别平行于 a、b，a' 和 b' 相交所成的锐角(或直角)叫做**异面直线 a 和 b 所成的角**(图 1-18)．由于异面直线 a 和 b 所成的角的大小，由 a、b 的位置决定，而与 O 点的位置无关．因此为了方便，点 O 常常

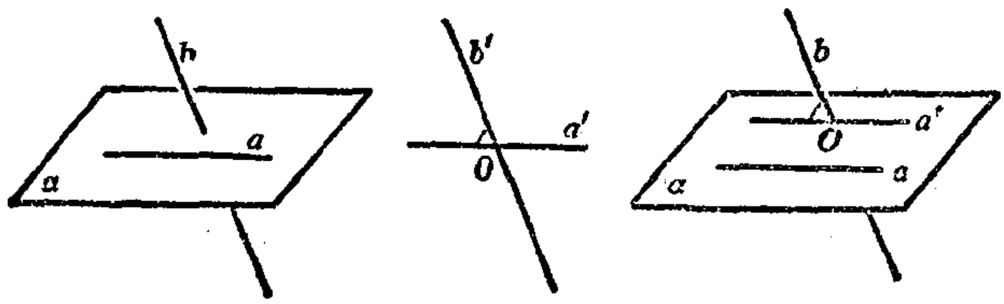


图 1-18

取在其中的一条直线上，例如，取在直线 b 上，然后经过点 O 作 $a' \parallel a$（图 1-18），那么 a' 和 b 所成的角，就是异面直线 a 和 b 所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，我们说这**两条异面直线互相垂直.**

如图 1-12 中所画六角螺帽的两条棱 AB、CD 所在直线是成 60° 角的异面直线；蜗轮和蜗杆的轴是互相垂直的异面直线，由蜗杆到蜗轮可把传动方向改变 90° 的角度.

今后我们说两条直线互相垂直，这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线.

图 1-19 中，正方体的棱 AA' 和 $B'C'$ 所在的直线是两条异面直线，直线 $A'B'$ 和他们都垂直相交. 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线.**

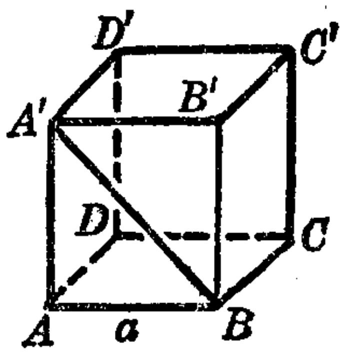


图 1-19

两条异面直线的公垂线上，垂足之间的线段的长叫做**两条异面直线的距离.** 图 1-19 中线段 $A'B'$ 的长就是异面直线 AA' 和 $B'C'$ 的距离.

例 如图 1-19，正方体的棱长为 a.

(1) 哪些直线与直线 $A'B$ 成异面直线？

(2) BA' 和 CC' 所成的角是多少度？

(3) BC 和 AA' 的距离是多少？

解: (1) ∵ $A' \notin$ 平面 BC'，而点 B 和直线 CC' 都在平面 BC' 内，$B \notin CC'$.

∴ 直线 CC' 与 $A'B$ 是异面直线.

同理直线 $C'D'$、DD', DC、AD、$B'C'$ 都和直线 $A'B$ 成异面直线.

(2) ∵ $CC' \parallel BB'$, ∴ BA' 和 BB' 所成的角就是 BA' 和 CC' 所成的角.

∵ $\angle A'BB' = 45°$, ∴ BA' 和 CC' 所成的角是 45°.

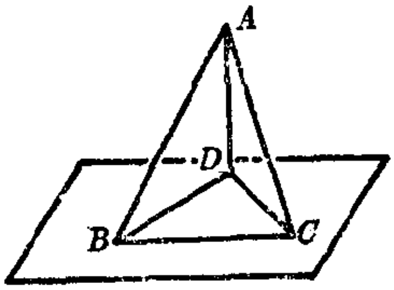
(3) ∵ $AB \perp AA'$, $AB \cap AA' = A$, $AB \perp BC$, $AB \cap BC = B$.

∴ AB 是 BC 和 AA' 的公垂线段.

∵ $AB = a$, ∴ BC 和 AA' 的距离是 a.

练 习

1. 在空间的两条互相垂直的直线一定相交吗?
2. 垂直于同一直线的两条直线可能有几种相互位置?
3. 已知 A、B、C、D 是空间四点, AB、CD 是异面直线, 求证: AC 和 BD, AD 和 BC 也都是异面直线.

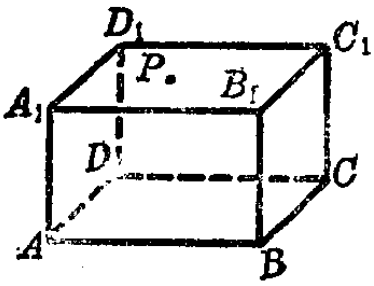


(第 3 题)

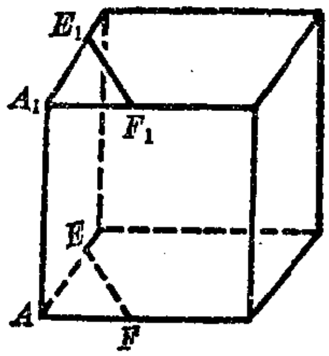
习 题 二

1. 什么叫平行线? 什么叫异面直线?
2. 画两个相交平面, 在这两个平面内各画一条直线使它们成为 (1) 平行线; (2) 相交直线; (3) 异面直线.
3. 有三条直线, 每两条都是异面直线. 画出它们的直观图.

4. 在一个长方形的木块的 A_1C_1 面上有一点 P，过点 P 画一条直线和棱 CD 平行，应怎样画？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在正方体中，$AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$．求证：$EF \underline{\parallel} E_1F_1$．

6. 已知：E、F、G、H 分别是空间四边形的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

7. 已知两直线 a 和 b 是异面直线，且直线 $c \parallel a$，直线 b 与 c 不相交．求证：b、c 是异面直线．

8. 和两条异面直线 AB、CD 同时相交的两条直线 AC、BD 一定是异面直线，为什么？

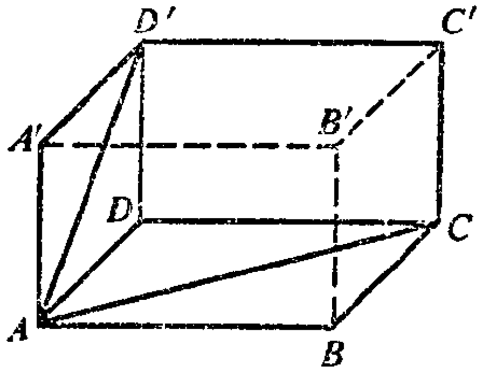
9. 什么叫两条异面直线所成的角？两条异面直线在什么情况下互相垂直．

10. 求证：如果一条直线和两条平行线中的一条垂直，那么也和另一条垂直．

11. 如图，已知长方体的长和宽都是 4cm，高是 2cm．

(1) BC 和 $A'C'$ 所成的角是多少度？

(2) AA' 和 BC' 所成的角是



（第 11 题）

多少度？

(3) $A'B'$ 和 DD'; $B'C'$ 和 CD 的距离各是多少？

12. 一条直线与两条平行直线都不相交，且与其中一条所成的角为 θ，求证：该直线与另一条所成的角也等于 θ.

三　空间直线和平面

1.7　直线和平面的位置关系

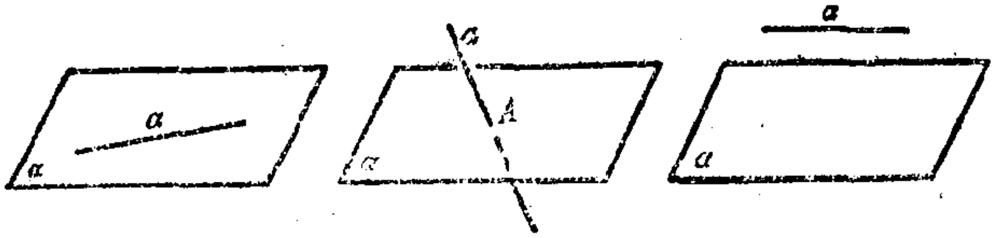
我们知道，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线在这个平面内．如果一条直线和一个平面只有一个公共点，那么这条直线和这个平面相交．

如果一条直线和一个平面没有公共点，那么我们说**这条直线和这个平面互相平行**，例如屋子中间下垂的电线和墙壁面就是平行的．

一条直线和一个平面的位置关系有：

1. 直线在平面内——有无数个公共点．
2. 直线和平面相交——只有一个公共点．} 直线不在
3. 直线和平面平行——没有公共点．　　} 平面内．

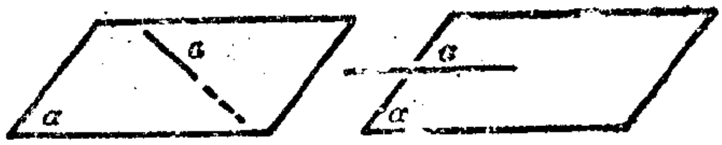
直线和平面三种位置关系的画法如图 1-20．画直线和平



甲　　乙　　丙

图　1-20

面相交时，要把直线伸出表示平面的平行四边形的外面，如图1-20乙，图1-21甲的画法就不明显. 画直线和平面平行时，要把直线画在表示平面的平行四边形的外面，如图1-20丙，而图1-21乙的画法不明显.



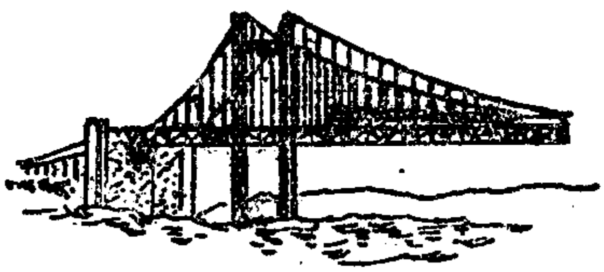
甲　　　　乙

图 1-21

直线 a 与平面 α 相交于点 A，写作 $a\cap\alpha=A$；直线 a 与平面 α 平行，写作 $a/\!/\alpha$；直线 a 不在平面 α 内，写作 $a\not\subset\alpha$.

练　习

1. 观察图中的吊桥. 说出立柱和桥面，水面；铁轨和桥面、水面的位置关系.



(第1题)

2. 举出直线与平面三种位置关系的实例.

1.8　直线与平面平行的判定和性质

直线和平面平行的判定定理　如果不在平面内的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行.

已知：$a/\!/b$, $a\not\subset\alpha$, $b\subset\alpha$（图1-22）.

求证：$a/\!/\alpha$.

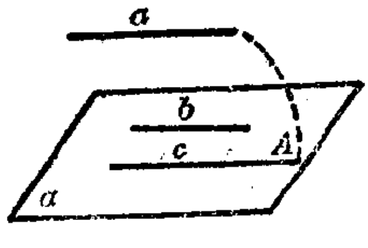


图 1-22

证明：假设直线 a 和平面 α 不平行．则直线 a 与平面 α 相交于一点 A.

$\because$ $a \parallel b$, $\therefore$ $A \notin b$.

在平面 α 内，过 A 点作直线 $c \parallel b$，这时 $a \parallel b$，$c \parallel b$，又 $a \cap c = A$，这和公理 4 矛盾．

$\therefore$ $a \parallel \alpha$.

建筑工人砌墙时，为了使每块砖的横棱都和地平面平行，他们在两根标尺间拉一条线，使它和墙的底线（在地平面内）平行，就是上面定理在实际中的应用（图 1-23）．

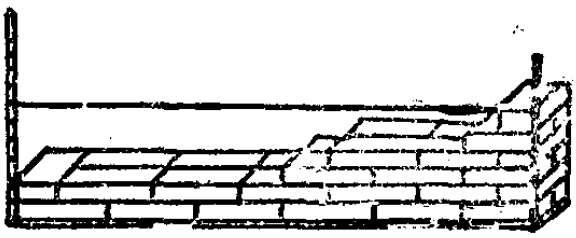


图 1-23

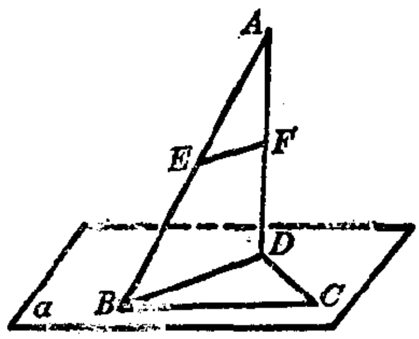


图 1-24

例 1 空间四边形相邻两边中点的连线，平行于经过另外两边的平面．

已知：空间四边形 $ABCD$（图 1-24），E、F 分别是 AB、AD 的中点，平面 α 经过 BC、CD.

求证：$EF \parallel \alpha$.

证明：连结 BD.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AE=EB\\AF=FD\end{array}\right\}\Longrightarrow EF\parallel BD\\BD\subset\alpha\\EF\not\subset\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow EF\parallel\alpha.$$

下面研究直线和平面平行的性质.

设直线 a 平行于平面 α，平面 β 经过 a 且与平面 α 相交于直线 b，我们研究直线 a 是否平行于直线 b.

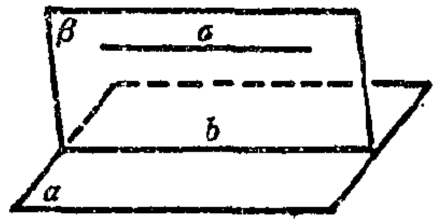


图 1-25

$\because$ $a /\!/ \alpha$,

$\therefore$ a 和平面 α 没有公共点.

又$\because$ $b \subset \alpha$, $\therefore$ a 和 b 没有公共点.

a 和 b 同在平面 β 内, 又没有公共点,

$\therefore$ $a /\!/ b$.

直线与平面平行的这个性质, 我们写成定理:

直线与平面平行的性质定理 **如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.**

上述定理还可用反证法证明，留给同学自己完成.

例 2 有一块木料如图 1-26，已知棱 BC 平行于平面 $A'C'$，要经过面 $A'C'$ 上一点 P 和棱 BC 将木料锯开. 1) 应怎样画线？2) 所画的线和面 AC 有怎样的关系？

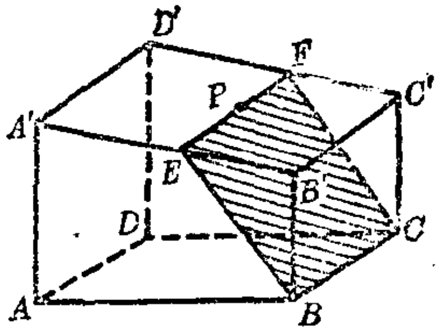


图 1-26

解: 1) $\because$ $BC /\!/$ 面 $A'C'$，平面 BC' 经过 BC 和平面 $A'C'$ 交于 $B'C'$,

$\therefore$ $BC /\!/ B'C'$.

在平面 $A'C'$ 内经过点 P 画线段 $EF \parallel B'C'$，根据公理 4，$EF \parallel BC$。

$\therefore$ EF 和 BC 确定一个平面，四边形 $BCFE$ 即锯开的截面。

2) $\because$ $EF \parallel BC$，根据直线与平面平行的判定定理，则 $EF \parallel$ 面 AC，BE、CF 都和面 AC 相交。

练　习

1. 长方体的各个面都是矩形，根据这一点说明为什么长方体一个面的各边及对角线都和相对的面平行。
2. AB、BC、CD 是不在同一平面内的三条线段，求证经过这三条线段的三个中点的平面和 AC 平行，也和 BD 平行。

习　题　三

1. 画两个相交平面，在一个平面内画一条直线和另一平面平行。
2. (1) 一条直线和另一条直线平行，它就和经过另一条直线的任何平面平行。这句话是否正确？

   (2) 一条直线和一个平面平行，它就和这个平面内的任何直线平行。这句话是否正确？

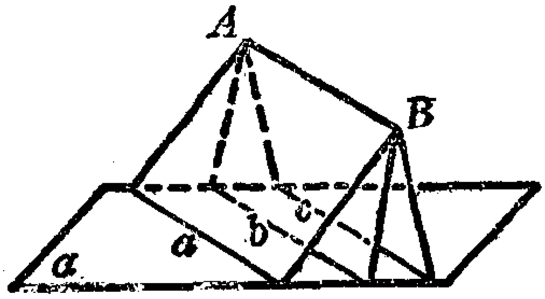
   (3) 平行于同一平面的两条直线互相平行。这句话是否正确？
3. 求证：如果一条直线与相交两平面都平行，那么此直线与两平面的交线平行。
4. 求证：如果一条直线与一个平面平行，那么夹在这条直

线和平面间的平行线段相等.

5. 求证：如果两条平行线中的一条和一个平面相交，那么另一条也和这个平面相交.

6. 如果一条直线与一个平面平行，那么经过这个平面内的点与这直线平行的直线，必在这个平面内.

7. 直线 AB 平行于平面 α，经过 AB 的一组平面和平面 α 相交. 求证：它们的交线 a、b、c、……是一组平行线.



(第 7 题)

8. 求证：如果两个相交平面分别经过两条平行直线中的一条，那么它们的交线和这两条直线平行.

1.9 直线与平面垂直的判定和性质

将一本书直立在桌面上，观察书的装订一边的侧棱 AB 和书页与桌面的交线(图 1-27). 显然，侧棱 AB 和书页与桌面的所有交线都是垂直的. 从这类事实，可以得出直线和平面互相垂直的概念.

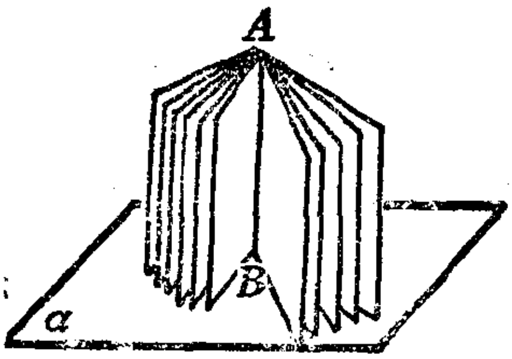


图 1-27

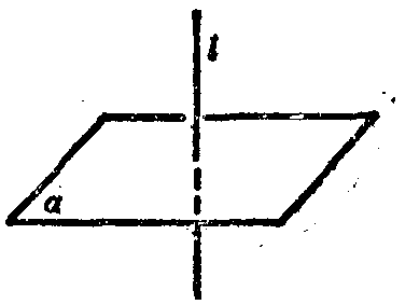


图 1-28

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，我们说**这条直线和这个平面互相垂直**．直线叫做**平面的垂线**，平面叫做**直线的垂面**，它们的交点叫做**垂足**．

画直线和平面垂直时，要把直线画成和表示平面的平行四边形的横边垂直．如图 1-28．直线 l 和平面 α 垂直用 $l\perp\alpha$ 表示．

判定直线和平面垂直有以下定理：

直线与平面垂直的判定定理　如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面．

已知：$l\cap\alpha=B$，m、n 是平面 α 内的任意两条相交直线，并且 $l\perp m$，$l\perp n$（图 1-29）．

求证：$l\perp\alpha$．

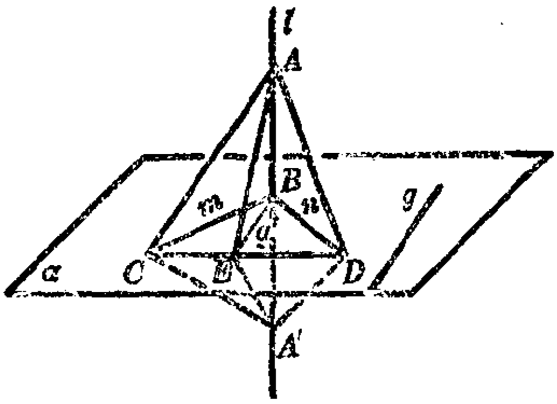


图　1-29

证明：设 m、n 都经过点 B，g 是平面 α 内的任意一条直线，经过点 B 引 $g'\parallel g$．在平面 α 内作一条直线分别与 m、n、g' 相交于 C、D、E．在 l 上 B 点的两侧取 $AB=A'B$，那么 m、n 都是线段 AA' 的垂直平分线．

因此 $AC=A'C$，$AD=A'D$，

$\therefore\quad \triangle ACD\cong\triangle A'CD$，得 $\angle ACE=\angle A'CE$．

$\therefore\quad \triangle ACE\cong\triangle A'CE$，得 $AE=A'E$．

$\therefore\quad g'\perp l$．

$\because\quad g'\parallel g$，$\therefore\quad l\perp g$．

因为 g 是平面 α 内的任意一条直线，所以 $l\perp\alpha$．

如果 m、n 中有一条，或两条都不经过点 B，那么可以过点 B 引它们的平行线，用同样方法可以证明 $l\perp\alpha$.

我们在地面上立柱子时，只要检查柱子是否和地面上的两条相交直线垂直，就可以知道柱子是否立正了.

例1　如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

已知：$a\parallel b$，$b\perp\alpha$（图 1-30）.

求证：$a\perp\alpha$.

证明：设 $b\cap\alpha=O$，在 α 上过点 O 引相交直线 m、n。

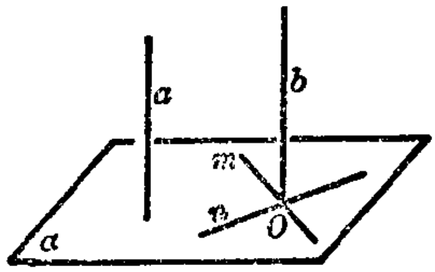


图　1-30

$\because$　$b\perp\alpha$,

$\therefore$　$b\perp m$, $b\perp n$.

又$\because$　$a\parallel b$,

$\therefore$　$a\perp m$, $a\perp n$.

$\therefore$　$a\perp\alpha$.

下面研究直线和平面垂直的性质.

设　$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，我们来研究直线 a 和 b 是否平行（图 1-31）.

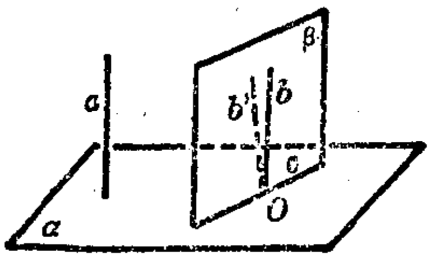


图　1-31

假定 b 与 a 不平行，过垂足 O 引直线 $b'\parallel a$. 设经过直线 b、b' 的平面为 β，$\beta\cap\alpha=c$.

$\because$　$a\perp\alpha$, $b'\parallel a$,

$\therefore$　$b'\perp\alpha$，$b'\perp c$.

又　$b\perp\alpha$，$\therefore$　$b\perp c$.

这样在平面β内，经过直线c上同一点O就有两条直线b、b'与c垂直，这是不可能的.

因此$b \parallel a$.

由此，我们得到下面的定理：

直线与平面垂直的性质定理　如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

从平面外一点A引这个平面的垂线，点A和垂足A'间的距离，叫做**这个点到这个平面的距离.**

例2　已知：一条直线l和一个平面α平行（图1-32）.

求证：l上各点到平面α的距离相等.

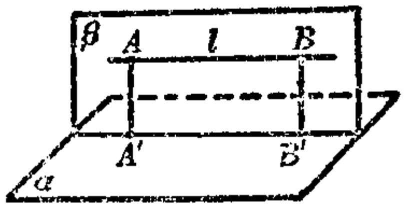


图　1-32

证明： 在直线l上任意取两点A、B，过A、B分别引平面α的垂线AA'、BB'，垂足为A'、B'.

$\because$　$AA' \perp \alpha$,　$BB' \perp \alpha$,

$\therefore$　$AA' \parallel BB'$.

AA'、BB'确定平面β，$\alpha \cap \beta = A'B'$.

$\because$　$l \parallel \alpha$,　$\therefore$　$l \parallel A'B'$.

$\therefore$　$AA' = BB'$. 就是说l上各点和α的距离都相等.

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做**这条直线和平面的距离.**

练　习

1. 求证：如果三条共点直线两两垂直，那么其中一条直线垂直于另两条确定的平面.

2. 求证：平面外一点与平面内各点连结的线段中，垂线最短.

3. 安装日光灯时，怎样才能使灯管和天棚、地板平行？

1.10 斜线的射影，直线和平面所成的角

如果一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个**平面的斜线**，斜线和平面的交点叫做**斜线足或斜足**.

过斜线上的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做**斜线在平面上的射影**. 这点到垂足的线段叫做**点到平面的垂线段**；这点到斜足的线段叫做**平面的斜线段**；垂足到斜足的**线段叫做斜线段在平面上的射影**.

如图 1-33，直线 AC 是斜线，C 是斜足，直线 BC 是斜线 AC 在平面 α 上的射影；线段 AB 是点 A 到平面 α 的垂线段，线段 AC 是点 A 到平面 α 的斜线段，线段 BC 是斜线段 AC 在平面 α 上的射影.

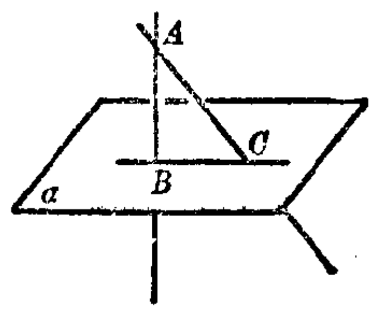


图 1-33

根据勾股定理，我们容易得到：

定理 从平面外一点到这个平面引垂线段和斜线段：

(1) 射影相等的两条斜线段相等；

(2) 相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段射影也较长；

(3) 垂线段比任何一条斜线段都短.

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做

这条直线和这个平面所成的角(图 1-34).

可以证明，直线和平面所成的角 θ，是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的.

如图 1-34，斜线 l，交平面 α 于点 O，在 l 上任取一点 A，引 $AB\perp\alpha$，垂足是 B. $\angle AOB$ 就是 l 和平面 α 所成的角. 若 OD 是平面 α 内和 OB 不重合的任意一条直线，$AC\perp OD$，垂足是 C，因为平面 α 的垂线段 AB 小于斜线段 AC，所以在两个有公共斜边 OA 的直角三角形 OAB、OAC 中，$\sin\theta<\sin AOC$. 因此 $\theta<\angle AOC$.

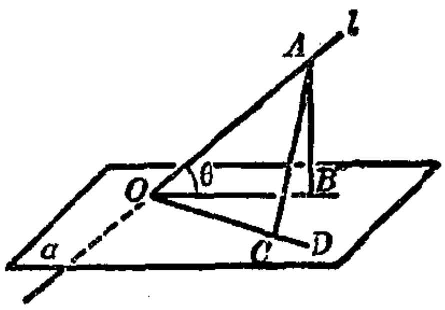


图 1-34

在特殊情形下，如果一条直线是一个平面的垂线，我们就说这条直线和这个平面所成的角是直角；如果一条直线和一个平面平行，或者直线在平面内，我们说这条直线和这个平面所成的角是 0° 的角.

例 已知：过平面 α 外一点 P 的两条斜线 PA、PB 和平面 α 所成的角相等.

求证：$PA=PB$.

证明：如图1-35，设 $PO\perp\alpha$，垂足为 O，连结 AO、BO，则 $\angle PAO$ 与 $\angle PBO$ 就是 PA、PB 和平面 α 所成的角.

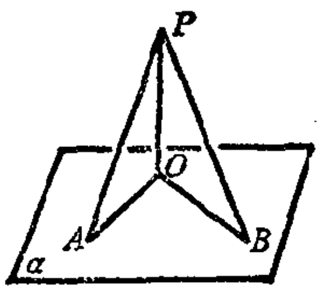


图 1-35

$\because\quad PO=PO,\ \angle PAO=\angle PBO,$

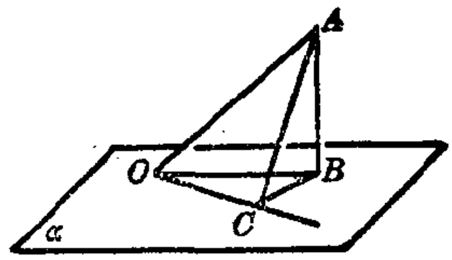
$\therefore\quad Rt\triangle POA\cong Rt\triangle POB,$

$\therefore \quad PA=PB.$

练　习

1. 已知斜线段的长是它在平面 α 上射影的 2 倍. 求斜线和平面 α 所成的角.

2. 如图, 已知斜线段 AO, 在平面 α 的射影为 OB. OC 为平面 α 内过 O 点的射线, $AC\perp OC$, $\angle AOB=45^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$. 求 $\angle AOC$, 并验证 $\angle AOB<\angle AOC$.



(第 2 题)

1.11　三垂线定理

三垂线定理　**在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直.**

已知: PA、PO 分别是平面 α 的垂线和斜线. AO 是 PO 在平面 α 上的射影, $a\subset\alpha$, $a\perp AO$ (图 1-36).

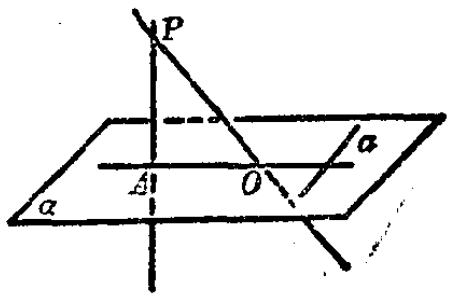


图　1-36

求证: $a\perp PO$

证明: $\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}PA\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp PA\\ a\perp AO\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a\perp \text{平面 } PAO\\ PO\subset\text{平面 } PAO\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp OP.$

这个定理讲到了三条垂线, 即如果 $PA\perp\alpha$, $a\perp AO$, 那末 $a\perp OP$. PO 和 a 这两条直线, 可以是相交直线, 也可以是异

面直线.

类似地可以证明:

三垂线定理的逆定理 **在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.**

例 道旁有一条河，彼岸有电塔 AB，高 15m. 只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出电塔顶与道路的距离?

解: 在道旁取一点 C，使 BC 与道边所成的水平角等于 $90°$. 再在道边取一点 D，使水平角 CDB 等于 $45°$，测得 C、D 的距离等于 20m.

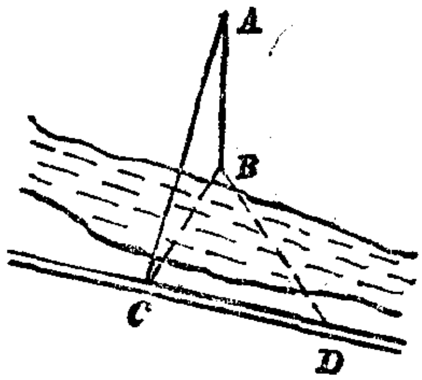


图 1-37

$\because$ BC 是 AC 的射影，

$CD \perp BC$,

$\therefore$ $CD \perp AC$.

因此，斜线 AC 的长度就是电塔顶与道路的距离.

$\because$ $\angle CDB = 45°, CD \perp BC, CD = 20(\text{m})$,

$\therefore$ $BC = 20(\text{m})$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$AC^2 = AB^2 + BC^2$,

$AC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{m})$.

电塔顶与道路的距离是 25 米.

练 习

1. 举出几个三垂线定理及其逆定理的实例.
2. AO 是平面 α 的垂线，O 是垂足，l 是平面 α 内的直线，已知 $AO = 5\text{cm}$，A 到 l 的距离是 13cm，求 O 到 l 的距离.

习 题 四

1. 和三角形的两边垂直的直线为什么也和第三边垂直?

2. 垂直于同一条直线的两条直线有哪几种位置关系? 垂直于同一个平面的两条直线有哪几种位置关系?

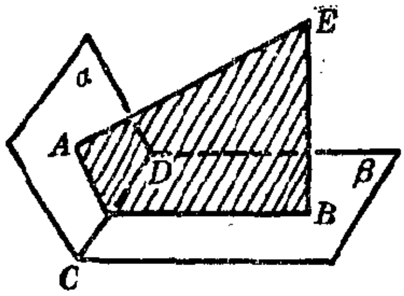
3. 求证: 如果一条直线平行于一个平面, 那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.

4. 直角三角形 ABC 在平面 α 内, D 是斜边 AB 的中点, $AC=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, $EC\perp\alpha$, $EC=12\text{cm}$, 求 EA、EB、ED 的长.

5. 和平面 α 相交的一条线段 AB 长 10cm, 已知 A、B 到平面 α 的垂直线段长分别是 4cm 和 3cm, 求连结两个垂线足的线段的长.

6. 两点 A、B 在平面 α 的同侧, 和平面 α 的距离分别是 a 和 b, 点 C 分线段 AB 成 $m:n$, 求 C 点到平面 α 的距离.

7. 已知: 平面 α、β 交于 CD, 线段 $EA\perp\alpha$, $EB\perp\beta$. 求证: CD 垂直于经过 EA、EB 的平面.



(第 7 题)

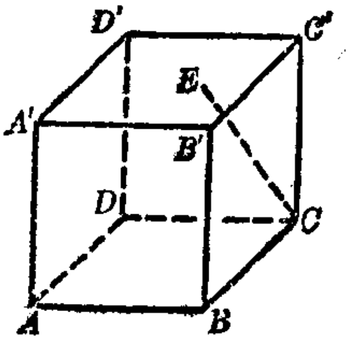
8. 从平面外一点 D 向平面引垂直线段 DA 及斜线段 DB、DC. 已知: $DA=a$, $\angle BDA=\angle CDA=60^\circ$, $\angle BDC=90^\circ$, 求 BC 长.

9. 已知平面 α 的一条斜线段 AB, 长 19cm, 斜足为 B, A 到平面 α 的距离为 15cm, 求 AB 与平面 α 所成的角及 AB

在平面 α 上的射影的长。

10. 有一方块木料如图，上底面上有一点 E，要经过 E 在上底面画一条直线和 C、E 的连线垂直，应怎样画？

11. 平面 α 内有一个正六边形，它的中心是 O，边长是 2cm，$OH \perp \alpha$，$OH = 4\text{cm}$。求点 H 到这个正六边形顶点和边的距离。



(第 11 题)

12. 求证：两条平行线和同一平面所成的角相等。

13. 由平面外一点引平面的两条斜线。求证：

(1) 斜线段相等，它们和平面所成的角也相等。

(2) 较长的斜线段和平面所成的角较小。

14. 用反证法证明：过一点和一个平面垂直的直线只有一条。

四 空间两个平面

1.12 两个平面的位置关系

我们已经知道，两个不重合的平面如果有一个公共点，它们就相交于过这点的一条直线。

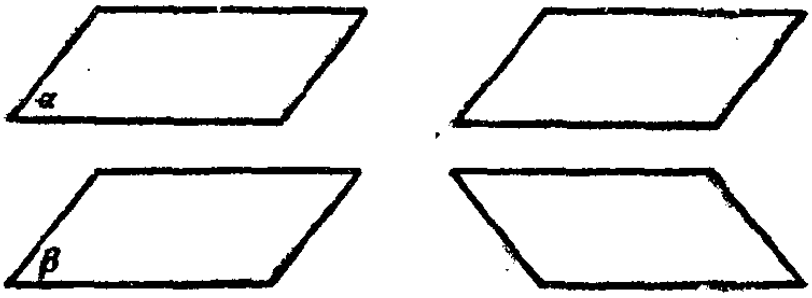
如果两个平面没有公共点，我们说**这两个平面互相平行**。例如，天花板面和地板面就互相平行。

两个不重合的平面的位置关系有：

1. 两个平面平行——没有公共点；

2. 两个平面相交——有一条公共直线.

画两个互相平行的平面时，要注意把表示平面的两个平行四边形的对应边画成平行，如图 1-38 甲，不要画成图 1-38 乙的样子.



甲　　　　乙

图 1-38

两个平面 α、β 平行，用 $\alpha /\!/ \beta$ 表示. 两个平面 α、β 相交于直线 a，记作 $\alpha \cap \beta = a$.

1.13 两个平面平行的判定和性质

判定两个平面平行，除根据定义以外，有下面的定理:

两个平面平行的判定定理　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

已知：在平面 β 内有两条相交直线 a 与 b 都和平面 α 平行(图 1-39).

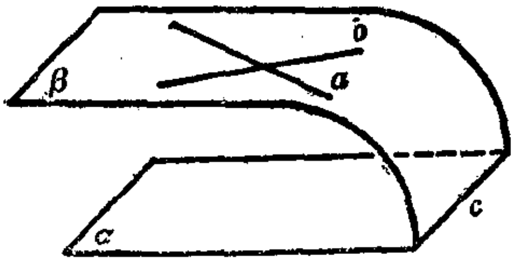


图 1-39

求证：$\beta /\!/ \alpha$.

证明：假设平面 β 不平行于 α，则平面 α 和 β 相交，

$\alpha \cap \beta = c$.

$\because$　$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，

$\therefore \quad a \parallel c.$

同理 $b \parallel c$.

于是 $a \parallel b$, 这与已知 a 和 b 相交矛盾.

$\therefore \quad \beta \parallel \alpha$.

利用平板仪测量时，要把水准器在平板上交叉放两次，如果水准器的气泡都居中，就可断定平板和水平面平行．这就是上面判定定理的应用.

例 1　垂直于同一直线的两个平面互相平行.

已知：平面α、β 都和直线 AA' 垂直(图 1-40).

求证：$\alpha \parallel \beta$.

证明：设经过直线 AA' 的平面 γ、δ 分别与平面 α、β 交于直线 a、a' 和 b、b'.

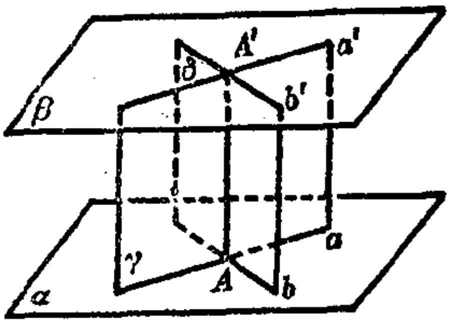


图　1-40

$\because \quad AA' \perp \alpha, \quad AA' \perp \beta,$

$\therefore \quad AA' \perp a, \quad AA' \perp a'.$

$\because \quad a$、a' 和 AA' 在同一个平面 γ 内，$\therefore \quad a \parallel a', a \parallel \beta$.

同理　$b \parallel \beta$.

又$\because \quad a \cap b = A, \quad \therefore \quad \alpha \parallel \beta$.

下面研究两个平面平行的性质．我们来研究两个平行平面 α、β, 看它们和同一平面 γ 的两条交线 a、b 是否平行(图1-41).

$\alpha \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 所以 a、b 不相交．又$\because a$、b 在同一平面 γ 内，所以 $a \parallel b$.

由此，我们得到下面的定理:

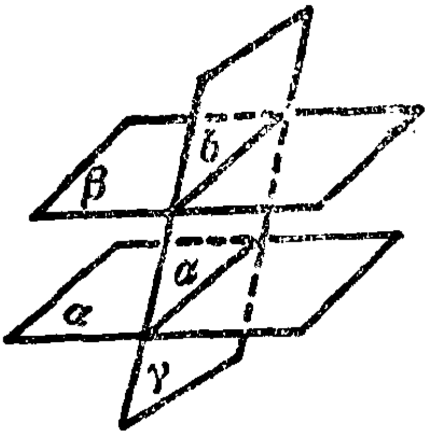


图　1-41

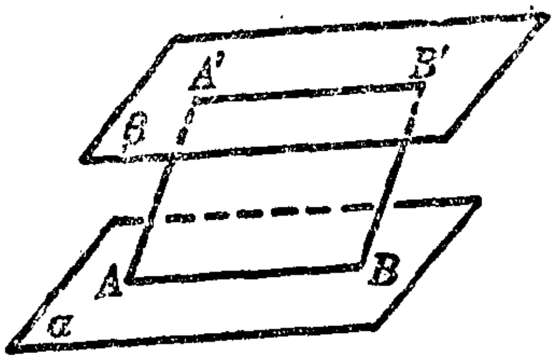


图　1-42

两个平面平行的性质定理　**如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.**

推论　**夹在两个平行平面间的平行线段相等.**

如图 1-42，夹在两个平行平面 α、β 间的平行线段 AA' 和 BB' 确定一个平面 $A'B$，于是有 $AB \parallel A'B'$，$\because AA' \parallel BB'$，$\therefore\ AA' = BB'$.

例 2　一条直线垂直于两个平行平面中的一个，必垂直于另一个.

已知：$\alpha \parallel \beta$，$a \perp \alpha$(图 1-43).

求证：$a \perp \beta$.

证明：设直线 a 和平面 α、β 相交于 A、A'. 经过 a 的平面 γ 和 δ 分别和平面 α、β 相交于 AB、$A'B'$ 和 AC、$A'C'$.

$\because\ \alpha \parallel \beta$,

$\therefore\ AB \parallel A'B'$.

$\because\ a \perp \alpha$,

$\therefore\ a \perp AB$.

因此　$a \perp A'B'$.

同理　$a \perp A'C'$.

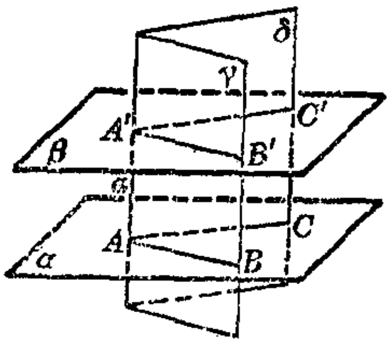


图　1-43

$\therefore \quad \alpha \perp \beta.$

和两个平行平面同时垂直的直线，叫做**这两个平行平面的公垂线**.

容易知道，夹在两平行平面之间的所有公垂线段的长度都相等，公垂线段的长度叫做**两个平行平面间的距离**.

练　习

1. 两个平面互相平行，能不能说分别在这两个平面内的直线都互相平行？
2. 下面两种说法是否正确：
   (1) 如果一个平面内的两条平行直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.
   (2) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

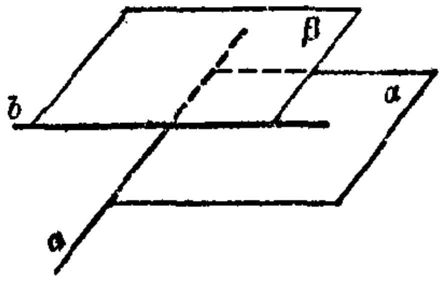
习　题　五

1. 用刻度曲尺检查长方体工件的相对两个面是否平行，你能有几种方法？
2. 求证：平行且相等的三条线段，如果不在同一平面内，那么它们对应端点连结线段所成的两个三角形所在平面必平行.
3. 一条直线和两个平行平面中的一个相交，必与另一个相交.
4. 一条直线和两个平行平面相交. 求证：它和两个平面相交成等角.

5. 两个平行平面的距离等于12cm, 一条直线和它们相交成60°角, 求这条直线上夹在两个平面间的线段的长.

6. a和b是两条异面直线.

求证: 过a且平行于b的平面必与过b且平行于a的平面平行.



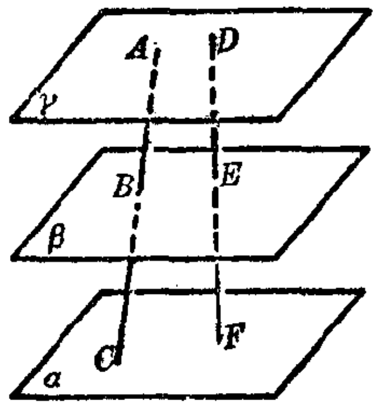
(第6题)

7. 求证: 平行于同一平面的两个平面互相平行.

8. 求证: 过平面外一点只有一个平面和已知平面平行.

9. 如图, 线段AC、DF被三个平行平面α、β、γ所截.

求证: $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.



(第9题)

1.14 二面角

建筑水电站的大坝, 为了坚固耐久, 必须使坝面和水面成适当的角; 发射人造地球卫星, 也要根据需要, 使卫星的轨道平面和地球赤道平面成一定的角 (图1-44). 这都要求我们研究两个平面所成的角.

一个平面内的一条直线, 把这个平面分成两部分, 其中的一部分叫做半平面.

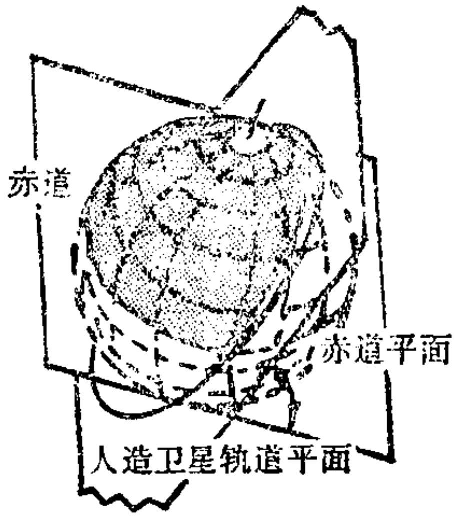


图 1-44

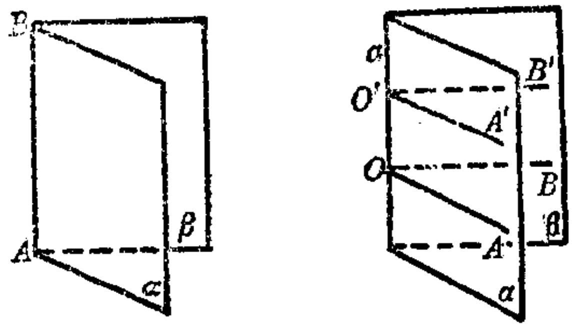


图 1-45

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**(图 1-45). 这条直线叫做**二面角的棱**. 这两个半平面叫做**二面角的面**.

棱为直线 AB, 面为 α、β 的二面角, 用 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ 表示. 如果棱用小写字母表示, 则可写成 $\alpha a\beta$.

如图 1-45, 在二面角 $\alpha a\beta$ 的棱 a 上取一点 O, 在半平面 α、β 上从 O 分别引垂直于棱 a 的射线 OA、OB, 射线 OA 和 OB 组成 $\angle AOB$. 在棱 a 上另取任意一点 O', 按同样方法作 $\angle A'O'B'$. 因为 OA 和 $O'A'$、OB 和 $O'B'$ 都垂直于棱 a, 所以 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ 的两边分别平行且方向相同, 因此 $\angle AOB=\angle A'O'B'$. 可见, $\angle AOB$ 的大小与点 O 在棱上的位置无关.

以二面角的棱上任一点为端点, 在两个面上分别引垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小, 可以用它的平面角来度量. 二面角的平面角是多少度, 这个二面角就是多少度.

平面角是直角的二面角叫做**直二面角**.

木工用活动角尺量工件的两个面所成的角时，实际上就是量这两个面所成的二面角的平面角（图 1-46）. 我国发射的第一颗人造地球卫星的倾角是 68.5°，就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角的平面角是 68.5°（图 1-44）.

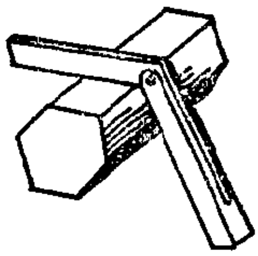


图　1-46

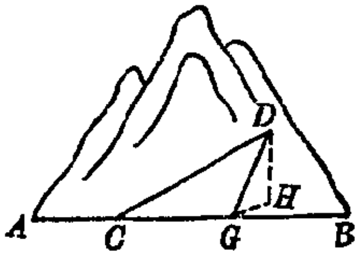


图　1-47

例　如图 1-47，山坡倾斜度是 60°，山坡上一条路 CD 和坡底线 AB 成 30° 角. 沿这条路向上走 100 米，升高了多少？

解：因为 CDG 是坡面，设 DH 是地平面的垂线，DH 就是所求的高度. 作 $HG\perp AB$，垂足为 G，那么 $DG\perp AB$，$\angle DGH$ 就是坡面和地平面所成的二面角的平面角，所以 $\angle DGH=60°$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad DH&=DG\cdot\sin 60°\\&=CD\cdot\sin 30°\cdot\sin 60°\\&=100\sin 30°\cdot\sin 60°\\&=25\sqrt{3}\\&\approx 43.3(\text{米}).\end{aligned}$$

沿这条路向上走 100 米，升高约 43.3 米.

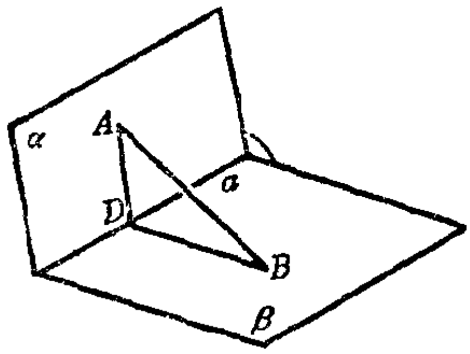
练　习

1. 拿一张正三角形的纸片，以它的一条高 AD 为折痕折成

一个二面角，指出这个二面角的面、棱、平面角。

2. 在 30° 的二面角的一个面内有一点，它到另一个面的距离是 10cm，求它到棱的距离。

3. 已知二面角 $\alpha a \beta=120°$，过棱 a 上一点 D 分别在面 α、β 内作线段 $DA\perp a$，$DB\perp a$，且 $DA=12$cm，$DB=14$cm，求 AB 的长。



(第 3 题)

1.15 两个平面垂直的判定和性质

两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直。

两个互相垂直的平面，画成下图那样，把直立平面的竖边画成和水平平面的横边垂直(图 1-48 甲、乙)，或把两个竖直平面的横边和纵边画成 45° 的角。

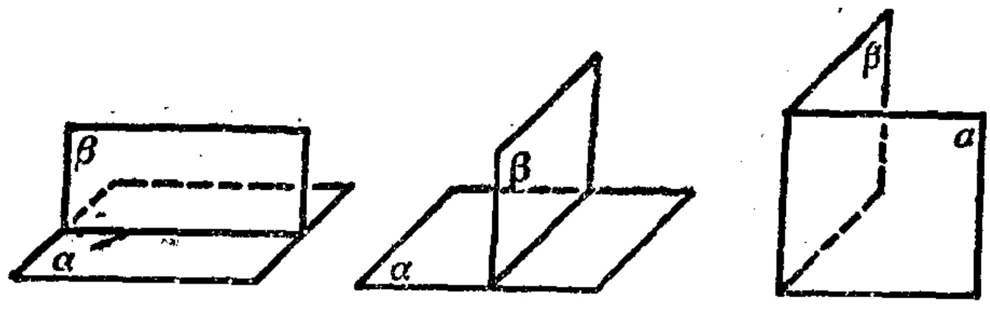


图 1-48

平面 α 和 β 垂直，写作 $\alpha\perp\beta$。

两个平面垂直的判定定理 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直。

已知：$AB\perp\beta$, $AB\subset\alpha$(图 1-49).

求证：$\alpha\perp\beta$.

证明：设 $\alpha\cap\beta=CD$，在平面 β 上引直线 $BE\perp CD$.

又∵ $AB\perp\beta$, $CD\subset\beta$,

∴ $AB\perp CD$.

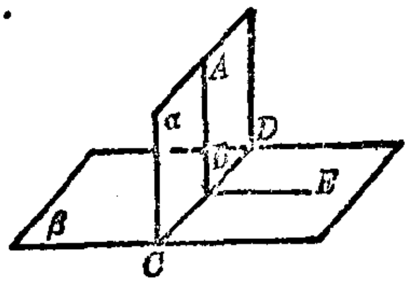


图 1-49

∴ $\angle ABE$ 是二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的平面角.

又∵ $AB\perp\beta$, $BE\subset\beta$, ∴ $AB\perp BE$.

∴ 二面角 $\alpha-CD-\beta$ 是直二面角,

∴ $\alpha\perp\beta$.

建筑工人砌墙时，常用一端系有铅垂的线来检查所砌的墙是否和地平面垂直(图 1-50)，就是应用上面的定理.

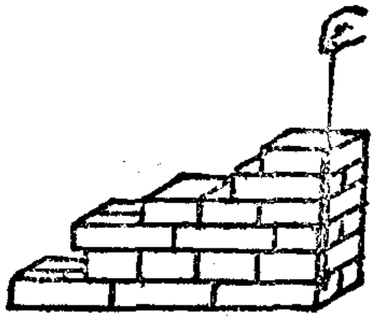


图 1-50

下面我们研究两个平面垂直的性质.

设平面 $\alpha\perp\beta$, 交线为 CD，平面 α 内的直线 $AB\perp CD$(图 1-49).

我们看 AB 是否垂直于平面 β.

在平面 β 上引直线 $BE\perp CD$, 则$\angle ABE$ 是二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的平面角.

∵ $\alpha\perp\beta$, ∴ $AB\perp BE$.

又∵ $AB\perp CD$, ∴ $AB\perp\beta$.

由此我们得到下面的定理.

两个平面垂直的性质定理 如果两个平面垂直，那么在

一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

例1 如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线，在第一个平面内.

已知：$\alpha\perp\beta$，$P\in\alpha$. $P\in a$，$a\perp\beta$（图 1-51）.

求证：$a\subset\alpha$.

证明：设 $\alpha\cap\beta=c$，过点 P 在平面 α 内作直线 $b\perp c$.

设 a、b 所在的平面与平面 β 交于直线 d.

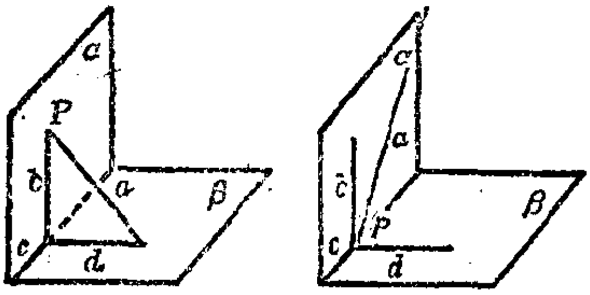


图 1-51

$\because$ $a\perp\beta$，$b\perp\beta$，$d\subset\beta$；

$\therefore$ $a\perp d$，$b\perp d$.

因为在直线 a、b 所在的平面内，过一点 P 只有一条直线和 d 垂直. 所以 a 必与 b 重合，$\therefore a\subset\alpha$.

例2 已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，它们的公垂线段 AA' 的长为 d. 在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF 的长.

解：如图 1-52，设经过 b 与 a 平行的平面为 α，经过 a 和 AA' 的平面为 β，$\alpha\cap\beta=c$. 因而 b、c 的交角就是 a、b 所成的角 θ，且 $AA'\perp c$.

又 $\because$ $AA'\perp b$，

$\therefore$ $AA'\perp\alpha$.

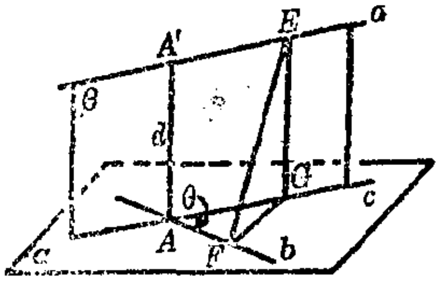


图 1-52

根据两个平面垂直的判定定理，$\beta\perp\alpha$. 在平面 β 上引 $EG\perp c$，则 $EG=AA'$，并且根据两个平面垂直的性质定理，

$EG\perp\alpha$. 连结 FG, 则 $EG\perp FG$.

在 $Rt\triangle EFG$ 中, $EF^2=EG^2+FG^2$.

$\because$ $EG=d$, $AG=m$, $AF=n$,

$\therefore$ 在$\triangle AFG$ 中, $FG^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta$.

$\therefore$ $EF^2=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$.

如果点 F(或 E)在点 A' 的另一侧, 则

$EF^2=d^2+m^2+n^2+2mn\cos\theta$.

因此, $EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm2mn\cos\theta}$.

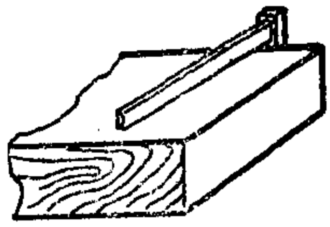
由上例我们注意到, $AA'\parallel EG$, $AA'=EG$ 是平面 α 的垂线段. 而 EF 是斜线段, 有 $AA'<EF$. 所以两条异面直线的距离, 是异面直线上两点间距离中最小的.

在实际中, 两条交叉的高压电线如果放电时, 火花是通过它们的最短距离的.

练 习

1. 画互相垂直的两个平面, 两两垂直的三个平面.

2. 如图, 检查工件的相邻两个面是否垂直时, 只要用曲尺的一边卡在工件的一个面上, 另一边在工件的另一个面上转动一下, 观察尺边是否和这个面密合就可以了. 为什么?



(第 2 题)

3. 在 60° 的二面角的棱上, 有两个点 A、B; AC、BD 分别是在这个二面角的两个面内垂直于 AB 的线段. 已知 $AB=4\text{cm}$, $AC=6\text{cm}$, $BD=8\text{cm}$, 用公式求 CD 的长.

习 题 六

1. 二面角的一个面内有一点，它到棱的距离等于到另一个面的距离的2倍．求这个二面角的度数．

2. 要铣一个V形铁，V形面成直二面角，上口宽40mm，求切削深度．

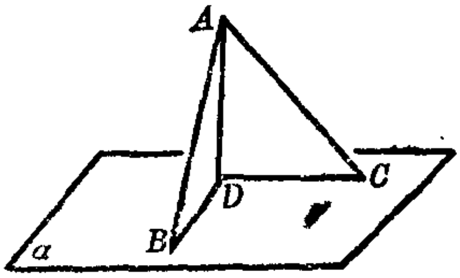


(第2题)

3. 在45°二面角的一个面内有一点A，它到另一个面的距离是a，求点A到棱的距离．

4. 求证：在已知二面角内，从二面角的棱出发的一个半平面内任意点，到二面角两个面的距离的比是一个常数．

5. 如图，以等腰直角三角形斜边BC上的高AD为折痕，使△ABD和△ACD折成相垂直的两个面．求证：$BD\perp CD$，$\angle BAC=60°$．



(第5题)

6. 求证：如果一个平面与另一个平面的平行线垂直，那么这两个平面互相垂直．

7. 求证：如果三条共点直线两两互相垂直，那么它们中每两条确定的三个平面也两两互相垂直．

8. 求证：如果平面α和不在这个平面内的直线a都垂直于平面β，那么$a\parallel\alpha$．

9. M是等腰三角形ABC的底边BC的中点，平面外的一点

S 和 A、B、C 三点的距离相等．求证：$\triangle SAM$ 所在的平面和 $\triangle ABC$ 所在的平面垂直．

10. 两条交叉电线的最短距离是 1m，它们所成的角是 60°，这两条电线上各有一点，距电线的公垂线的垂足都是 10 m．求这两点的距离．

小　结

一、本章的主要内容是有关空间直线、平面之间的相互位置关系和有关的概念及画法．着重研究直线、平面间平行与垂直关系的判定与性质．

二、本章的四个公理是这一章的基础．此外，平面几何的定义、公理、定理对于空间同一平面内的图形仍然适用．立体几何的问题多转化为平面几何问题来解决．

三、空间两条直线的位置有三种：相交、平行、异面．前两种在平面几何中已研究过．两条异面直线，它们所成的角是角的概念拓广到两条异面直线上；连结两条异面直线上两点的线段中，公垂线段最短，公垂线段的长就是两条异面直线的距离．

四、直线和平面的位置关系有三种：直线在平面内；直线和平面相交；直线和平面平行．

在平面外和平面内一条直线平行的直线，平行于平面；一条直线和一个平面平行，过这条直线的平面与原平面的交线和该直线平行．

和平面内两条相交直线都垂直的直线垂直于平面；两条

平行线同垂直于一个平面;其逆也成立.

一直线和平面平行,直线上任意的点到平面的距离相等.用它定义平行直线到平面的距离.

五、直线和平面所成的角是角的概念拓广到直线与平面上,它是这条直线与平面上任何直线所成的角中最小的角.

平面内一条直线和平面的斜线的射影垂直时,和斜线也垂直;其逆也成立。

六、不重合的平面的位置关系只有相交与平行两种.

一个平面内有两条相交直线平行于另一平面,这两个平面平行;两个平行平面和第三个平面相交,它们的交线平行.

两平行平面间的公垂线段相等.用它定义两个平面的距离.

七、二面角是角的概念拓广到两个平面上,二面角用它的平面角来度量.

一个平面经过另一个平面的一条垂线,两个平面互相垂直;两个平面互相垂直,在其中一个平面内垂直于交线的直线,垂直于另一个平面.

复习题一

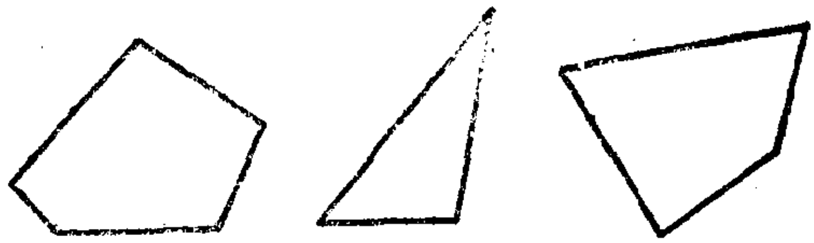
1. 下面的说法正确吗?为什么?

(1) 两条直线确定一个平面;

(2) 如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面重合。

2. 求证：任何两条都相交且不共点的四条直线共面。

3. 用斜二侧画法画下列图形的直观图。



（第3题）

4. 在一个平面内，经过直线外一点，有几条直线和这条直线垂直？在空间呢？

5. 求证：过两条平行线中一条的所有平面，都与另一条直线平行或经过另一条直线。

6. 求证：如果两点在一个平面的同侧，并且和这个平面的距离相等，那么这两点的连线和这个平面平行。

7. 点 P 到 $Rt\triangle ABC$ 的直角顶点 C 的距离为 24cm，到两直角边的距离都是 $6\sqrt{10}$cm．求：(1) P 到平面 ABC 的距离；(2) PC 与平面所成的角。

8. 正方形的边长是 a，中心 O，OA 垂直于正方形所在的平面，OA 的长是 b，求点 A 到正方形各边的距离。

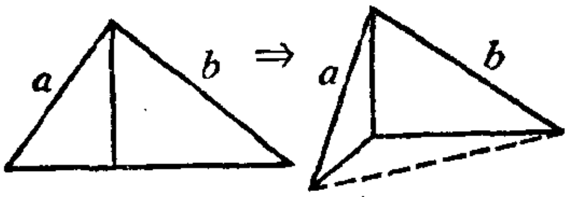
9. 三个平面两两相交，求证：这三条交线交于一点或互相平行。

10. 夹在两个平行平面之间的线段 AB、CD 相交于点 S．已知 $AS=18.9$cm，$BS=29.4$cm，$CD=57.5$cm．求：线段 CS、DS 的长。

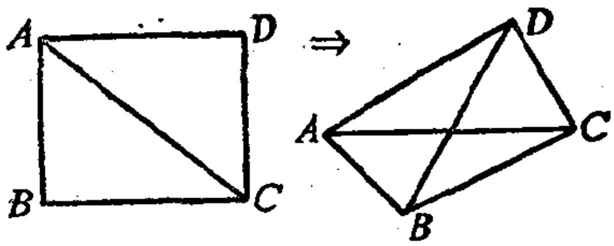
11. 在直二面角的棱上有两点 A、B，AC 和 BD 各在这个二面角的一个面内，并且都垂直于棱 AB．设 $AB=8$cm，AC

$=6\text{cm}, BD=24\text{cm}$. 求 CD 的长.

12. 已知一个直角三角形的两直角边长为 a、b, 把它沿斜边上的高折成直二面角, 求两直角边夹角的余弦.



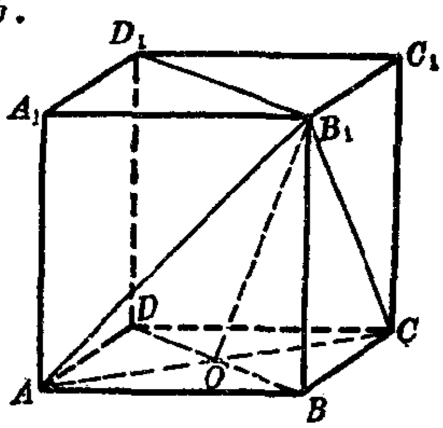
(第 12 题)



(第 13 题)

13. 把长、宽分别为 4、3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线折成直二面角. 求顶点 B 和 D 的距离.

14. $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为一正方体, 过 A、C、B_1 三点作一截面. 求证: 截面 $ACB_1 \perp$ 对角面 DBB_1D_1.



(第 14 题)

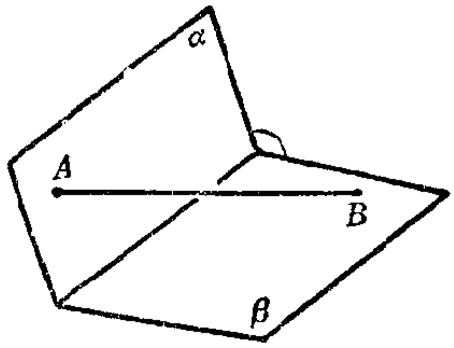
15. 两个面积不相等的三角形不在同一平面内, 它们的边两两对应平行. 证明:(1) 三条对应顶点的连线交于一点; (2) 这两个三角形相似.

16. 平面 α 过 $\triangle ABC$ 的重心 G. 求证: 在平面 α 同侧的两个顶点到平面 α 的距离的和, 等于另一个顶点到该平面的距离.

17. a、b 是两条异面直线, 平面 α 经过直线 b, $a /\!/ \alpha$, 平面 β 经过直线 a 与平面 α 相交于直线 c. 求证: (1)直线 b、c 所成的角就是异面直线 a、b 所成的角. (2) 如果 $\alpha \perp \beta$, $b \cap$

$c=A$, $AB\perp\alpha$ 交直线 a 于点 B, 则线段 AB 就是异面直线 a、b 的公垂线, 直线 a 与平面 α 的距离就是异面直线 a、b 的距离.

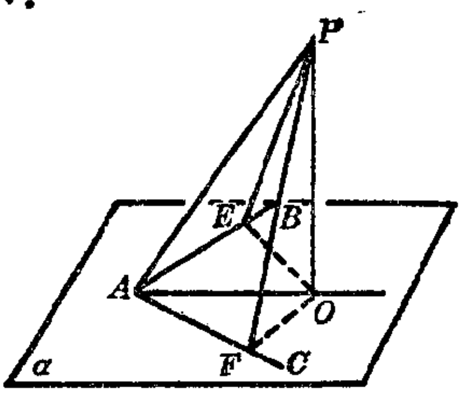
18. 在 $120°$ 的二面角的两个面 α 和 β 内, 分别有点 A 和点 B, 已知点 A 和点 B 到棱 a 的距离分别为 2cm 和 4cm, 且线段 $AB=10$cm. (1) 求直线 AB 和棱 a 所成的角; (2) 求直线 AB 和平面 β 所成的角.



(第 18 题)

19. 过已知平面外一点平行于该平面的直线, 都在过这个点且平行于已知平面的平面内.

20. 如果一个角所在平面外一点到角两边的距离相等, 那么过这个点到平面的垂线的垂足在这个角的平分线上.



(第 20 题)

第二章　多面体和旋转体

一　多面体和旋转体及其面积

2.1　多面体

火柴盒、车刀、矿石的结晶体等的外形都是由一些多边形围成的．由几个多边形*围成封闭的几何体叫做**多面体**(图2-1)．围成多面体的各个多边形叫做**多面体的面**．相邻的面的公共边叫做**多面体的棱**．若干个面的公共顶点叫做**多面体的顶点**．连结不在同一个面内的两个顶点的线段叫做**多面体的对角线**．

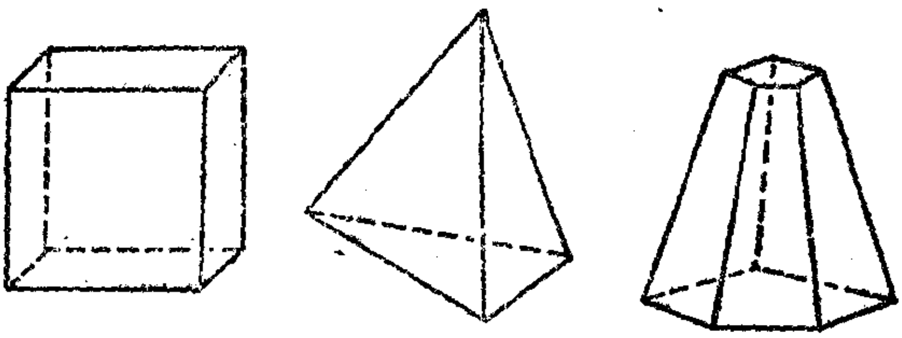


图　2-1

把多面体的任意一个面伸展成平面，如果所有其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面体叫做**凸多面体**．

多面体的面数至少是四．多面体依照它的面数分别叫做四面体、五面体等等．

---

* 这里所说的多边形，包括它内部的平面部分．

练　习

举出多面体的一些实例。

2.2　棱柱

1. 棱柱的概念和性质

我们常看到一些物体，例如方砖、三棱镜、六角形的铅笔等，它们都呈棱柱的形状。

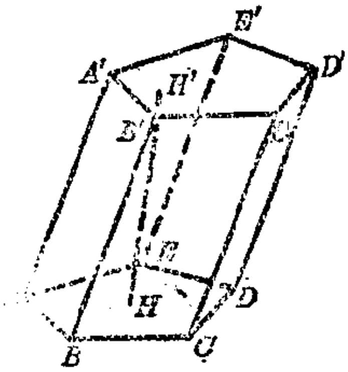


图　2-2

有两个面互相平行，其余每相邻两个面的公共边互相平行的多面体叫做**棱柱**．这两个互相平行的面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**．两个侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**．两个底面的距离叫做**棱柱的高**．棱柱通常用表示一条对角线端点的两个字母来表示，如图 2-2 中的棱柱记作棱柱 AD'．

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做**斜棱柱**(图 2-3 甲)，侧棱垂直于底面的棱柱叫做**直棱柱**(图 2-3 乙)，底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**(图 2-3 丙)．

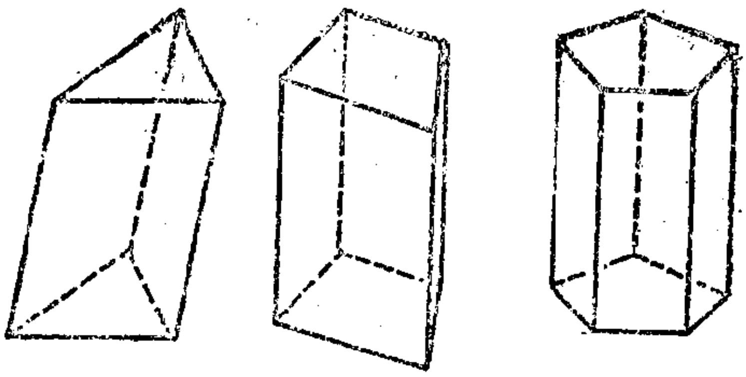

甲　　乙　　丙

图　2-3

棱柱的底面有三角形、四边形等等，这样的棱柱分别叫做**三棱柱**、**四棱柱**等等．如图 2-3，甲是斜三棱柱，乙是直四棱柱，丙是正五棱柱．

底面是平行四边形的棱柱叫做**平行六面体**（图 2-4），其中侧棱和底面斜交的叫做**斜平行六面体**（图 2-4 甲），侧棱和底面垂直的叫做**直平行六面体**（图 2-4 乙），底面是长方形的直平行六面体叫做**长方体**（图 2-4 丙），棱都相等的长方体叫做**正方体**（图 2-4 丁）．

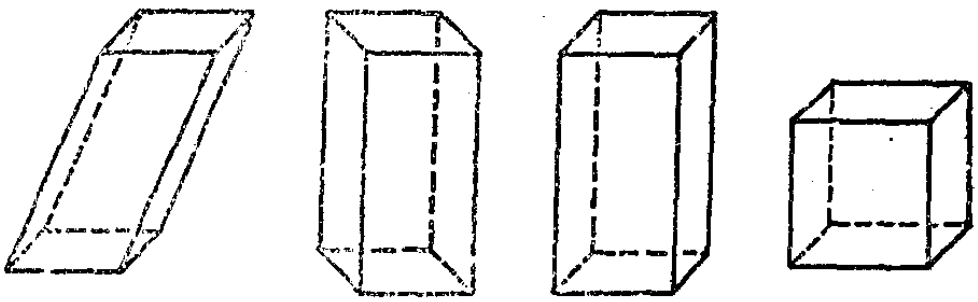


图 2-4

棱柱有下面的一些性质：

1. **侧棱都相等，侧面都是平行四边形．**

2. **两个底面与平行于底面的截面是全等多边形．**

例 1 求证长方体的对角线的平方等于它的相邻三个棱的平方和．

已知：长方体 DB' 中，$B'D$ 是一条对角线（图 2-5）．

求证：$B'D^2=AB^2+BC^2+BB'^2$．

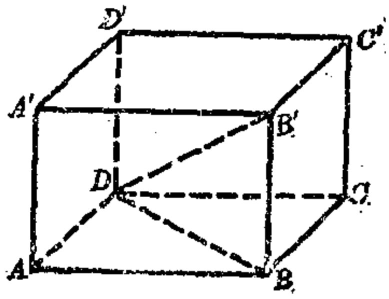


图 2-5

证明：连结 BD，

∵ $AD \perp AB$, $AD = BC$,

∴ $BD^2 = AD^2 + AB^2 = BC^2 + AB^2$.

∵ $BB' \perp BD$, ∴ $B'D^2 = BD^2 + BB'^2$.

因此，$B'D^2 = AB^2 + BC^2 + BB'^2$.

练 习

1. 平行六面体是不是斜棱柱，长方体是不是直棱柱，正方体是不是正棱柱？为什么？
2. 四棱柱集合、平行六面体集合、长方体集合、正方体集合有怎样的包含关系？用图表示出来.

2. 直棱柱的直观图

在绘制立体图形时，我们要把空间的图形在平面上画得富有立体感，又能表达出各主要线段的度量关系. 我们把这种图叫做**直观图**. 直观图的画法很多，我们先举例说明常用的一种.

图 2-6 是一个长 20mm、宽 17mm、高 27mm 的长方体的直观图. 它的画法如下:

先画三条轴 Ox、Oy、Oz，Ox是横的(水平方向)；Oy和Ox成 45° 角或 135° 角(图 2-7)；Oz 和 Ox 垂直，向上. Ox、Oy 所确定的平面表示水平平面，Oz 表示和水平平面垂直的方向.

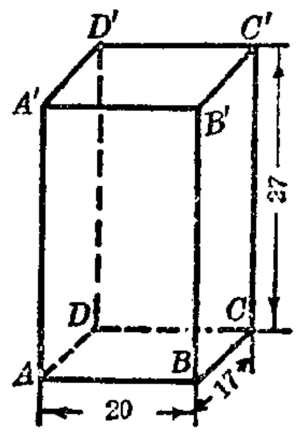


图 2-6

然后根据1.3节的方法，画出长方体的底面 $ABCD$.

再经过 A、B、C、D 各点画 AA'、BB'、CC'、DD' 和 Oz 平行（如图2-7），它们的长都等于长方体的高.

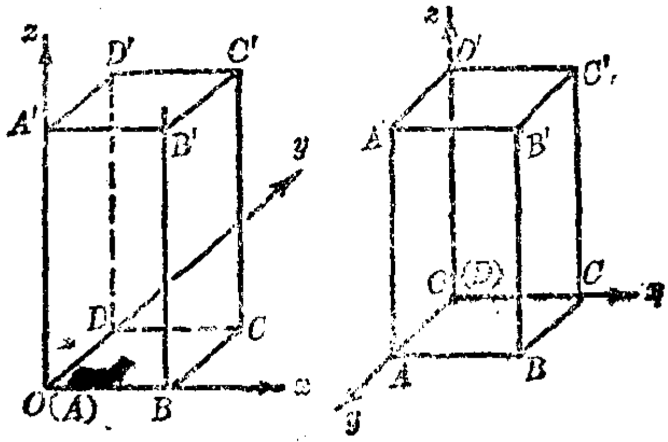


图 2-7

最后，顺次连结 A'、B'、C'、D' 各点，并且把被遮住的棱画成虚线，擦去轴线，就得长方体的直观图（图2-6）.

一般的直观图都是按照某种比例尺放大或缩小来画的，这时和 Ox、Oz 平行的线段的长是实物上实际长度按比例尺放大或缩小后的长，和 Oy 平行的线段的长是实物长度按比例尺放大或缩小后的一半的长.

画直棱柱的直观图的步骤如下：

1. 定比例尺，画轴.

2. 画底面　就是按比例尺画直棱柱底面图形的水平放置图（用1.3节的方法）.

3. 画侧棱　侧棱经过底面各顶点，和 Oz 平行（如图2-7），它的长等于直棱柱的高按比例尺放大或缩小后的长.

4. 成图　画出另一个底面，被遮住的棱画成虚线，擦掉轴线.

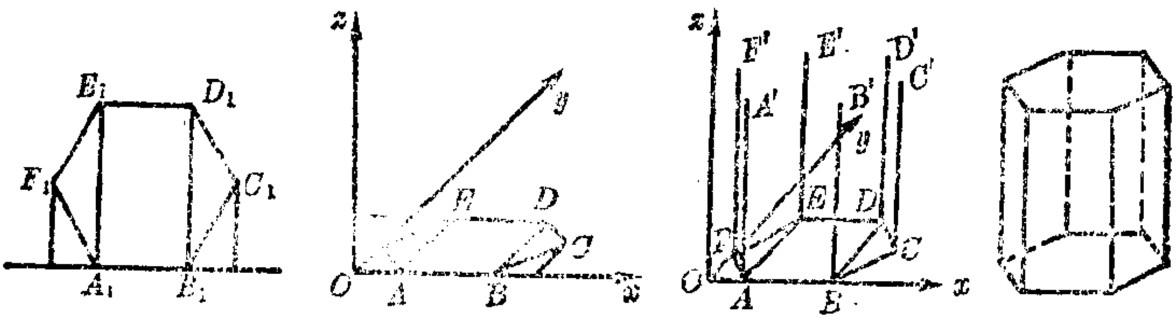
例 1　有一个正六棱柱，底面的边长是 14cm，高 22cm，画出它的直观图.

解： 1）取 1∶10 的比例尺，画轴 Ox、Oy、Oz.

2）画底面　画正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，它的边长等于 1.4cm（图 2-8 甲），在 xOy 所表示的平面内画出它的水平放置图形 $ABCDEF$（图 2-8 乙）.

3）画侧棱　从点 A、B、C、D、E、F 画线段 AA'、BB'、CC'、DD'、EE'、FF'，平行于 Oz 轴，长等于 2.2cm（图 2-8 丙）.

4）成图　画出上底面 $A'B'C'D'E'F'$，并且加以整理就得到正六棱柱的直观图（图 2-8 丁）.



甲　　　乙　　　丙　　　丁

图　2-8

上面的叙述是为了说明画法，实际画直观图时，只要画出图形，注明所用的比例尺就可以了.

3．直棱柱的侧面积

把直棱柱的侧面展在平面上，展开图是矩形，矩形的长等于直棱柱底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h（图 2-9）.

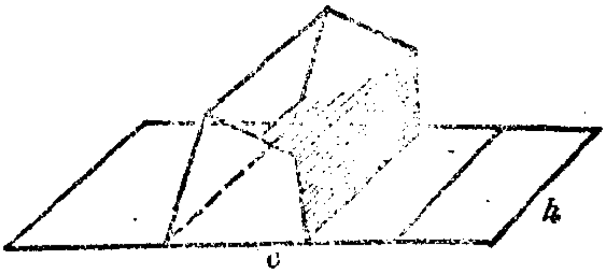


图　2-9

由此，我们得到直棱柱的侧面积公式：

$$\boxed{S_{直棱柱侧}=ch.}$$

棱柱的全面积等于侧面积与两底面积的和.

例 2 一个正四棱柱的对角线长是 $4\sqrt{6}$ cm. 它的侧棱是底边长的二倍，求这个棱柱的全面积.

解： 设棱柱底面边长是 $x$cm，侧棱的长是 $y$cm，那么依已知条件，可得

$$\begin{cases} y=2x, \\ 2x^2+y^2=(4\sqrt{6})^2. \end{cases}$$

解方程组，取正值得 $\begin{cases} x=4, \\ y=8. \end{cases}$

于是 $S_{全}=4\times4\times8+2\times4^2=160(\text{cm}^2)$.

棱柱的全面积等于 160cm^2.

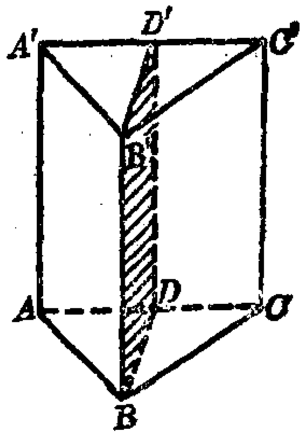
练 习

有一个直五棱柱，底面各边的长分别是 21.6cm，3.47cm，2.72cm，18cm，8.0cm，一条侧棱的长是 32.76cm. 求这直棱柱的侧面积.

习 题 七

1. 指出 2.1 节中的各多面体的面数、棱数和顶点数.
2. 用厚纸做一个底面边长是 3 cm，高是 10cm 的正五棱柱的模型.
3. 求证：平行六面体的对角线交于一点，且互相平分.
4. 已知正方体的一条对角线的长是 a，求它的棱长.

5. 正三棱柱的高是h，底面每边的长是a。求经过它的一条侧棱而垂直于所对侧面的截面的面积。



（第5题）

6. 画棱长是20cm的正方体的直观图。

7. 画底面边长是3 cm，高是4 cm的正三棱柱的直观图。

8. 一个长方体的对角线长是$2\sqrt{14}$m，长、宽、高的比是2:3:1，求它的全面积。

9. 一个正六棱柱，它的底面边长$a\approx3.6$m，高$h\approx4.15$m，在它周围（不包括底面）包上白铁皮，如果白铁皮每张宽$b\approx0.9$m，长$c\approx1.2$m，最少需要多少张？

10. 将斜棱柱用垂直于棱的平面截断，求证：这个斜棱柱的侧面积等于它的侧棱长与截面周长的积。

2.3 棱锥

1. 棱锥的概念和性质

帆布帐篷和石桩的顶部等都是棱锥的形象（图2-10）。

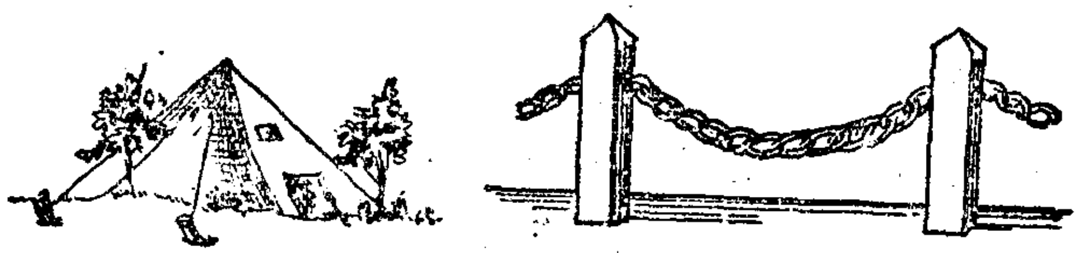


图 2-10

有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角

形的多面体叫做**棱锥**．这个多边形面叫做**棱锥的底面**．有公共顶点的三角形面叫做**棱锥的侧面**．相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**．各侧面的公共顶点叫做**棱锥的顶点**．顶点到底面的距离叫做**棱锥的高**(图 2-11)．

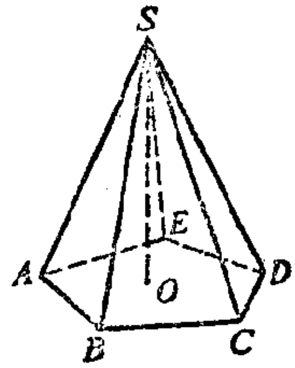


图 2-11

棱锥可以用表示顶点和底面顶点的几个字母表示，例如图 2-11 的棱锥，可记作棱锥 $S-AC$.

棱锥的底面有三角形、四边形等等，它们分别叫做**三棱锥**、**四棱锥**等等.

一个棱锥，如果它的底面是正多边形，并且顶点到底面的垂线足是底面中心，这样的棱锥叫做**正棱锥**.

正棱锥有下面一些性质：

1. **各个侧面都是全等的等腰三角形**.各等腰三角形底边上的高相等，它叫做**正棱锥的斜高**.

2. **高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形.**

例 1 一个棱锥被平行于底面的平面所截，求证：截面和底面相似，且面积的比等于截得棱锥和已知棱锥的高的平方比.

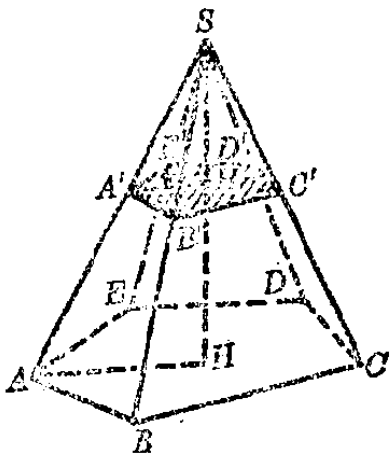


图 2-12

证明： 设已知棱锥 $S-AD$，它的高是 SH，并且平行于底

面的截面 $A'B'C'D'E' \cap SH = H'$（图 2-12）.

首先证明，截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$.

因为截面平行于底面，所以，

$A'B' \parallel AB,\ B'C' \parallel BC,\ C'D' \parallel CD, \cdots,$

因而 $\angle A'B'C' = \angle ABC, \angle B'C'D' = \angle BCD, \cdots$.

连结 $A'H'$ 和 AH, $A'H' \parallel AH$,

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH}.$$

同理 $\quad \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{SH'}{SH}, \cdots$.

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \cdots = \frac{SH'}{SH}.$$

所以，截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$. 相似比等于 $\dfrac{SH'}{SH}$.

其次，根据相似形性质，得到

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{SH'^2}{SH^2}.$$

这个例题的结果，是关于棱锥的一个性质定理.

练 习

1. 求底面边长是 a，高是 h 的正四棱锥的侧棱长和斜高.
2. 一个三棱锥的每条棱长都是 a，求过三个侧棱中点的截面面积.

2. 正棱锥的直观图

正棱锥的直观图由底面和顶点所决定. 底面的画法和直

棱柱的底面的画法相同，顶点在经过底面的中心和 Oz 轴平行的直线上，顶点和底面的中心连线的长等于正棱锥的高。

例 2 正五棱锥的底面每边长是 12cm，高是 20cm，画出它的直观图。

解： 1) 取 1:10 的比例尺，画轴 Ox、Oy、Oz。

2) 画底面 画正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$，它的边长是1.2cm。画出它的中心 P_1。再按 1.3 节例 1 的画法，在水平面 xOy 内画出它的直观图 $ABCDE$，及 P_1 的对应点 P（图 2-13 甲、乙）。

3) 画顶点 从点 P 画 $PS\parallel Oz$，$PS=2$cm（图 2-13乙）。

4) 成图 连结 SA、SB、……，加以整理，就得到所求的直观图（图 2-13 丙）。

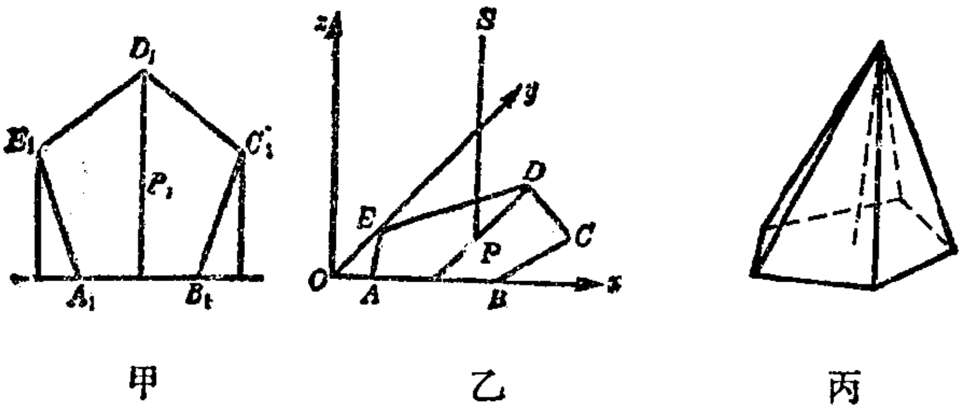


图 2-13

3. 正棱锥的侧面积

图 2-14 是正 n 棱锥和它的侧面展开图。它的侧面展开图是由 n 个全等的等腰三角形组成的。设这个正棱锥底面边长是 a，周长是 c，斜高是 h'，那么它的侧面积是 $n\cdot\frac{1}{2}ah'$，即 $\frac{1}{2}(na)h'$。因 $na=c$，所以

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'.$$

棱锥的全面积是侧面积与底面积的和.

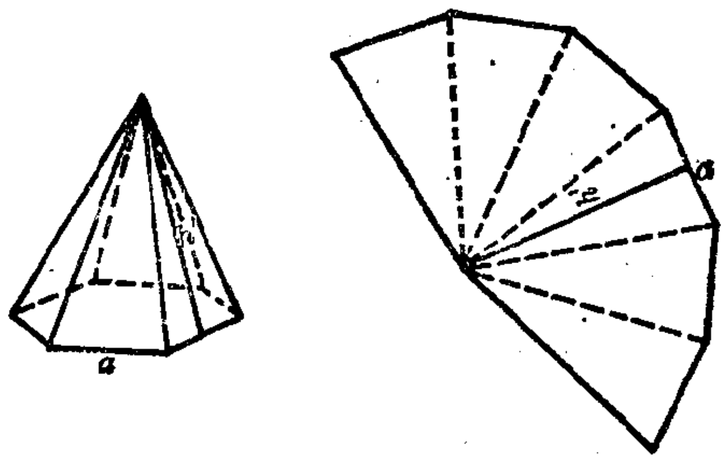


图 2-14

例 3 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85m，底的边长是1.50m，计算制造塔顶需要多少铁板(精确到0.1m²).

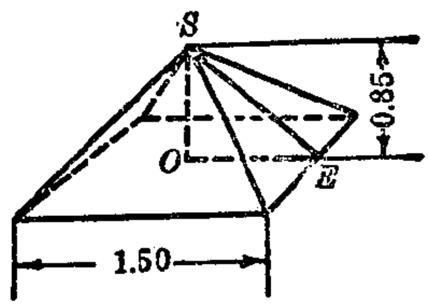


图 2-15

解: 如图 2-15，S 表示塔顶的顶点，O 表示底的中心，则 SO 是高，设 SE 是斜高.

由直角三角形 SOE，根据勾股定理，

$$SE=\sqrt{\left(\frac{1.50}{2}\right)^2+0.85^2}$$

$$\approx 1.13(\text{m}).$$

所以，$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}(1.50\times 4)\times 1.13$

$$\approx 3.4(\text{m}^2).$$

塔顶需要铁板约为 $3.4m^2$。

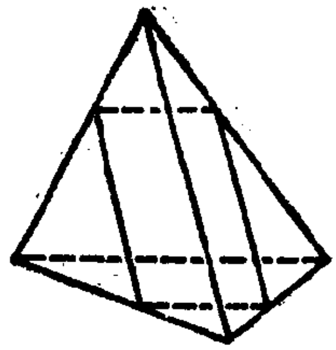
练 习

已知正三棱锥的底面边长与棱长都等于 a，求全面积。

习 题 八

1. 用厚纸制作一个底面边长是4cm，高是 6 cm 的正四棱锥的模型。
2. 一个展览馆屋顶为一个正六棱锥形的尖塔，底面每边长是 1.0 米，侧棱和底面的边所成的角是 84°，求这尖塔的高（精确到 0.1 米）。
3. 一个棱锥的底面面积是 Q，经过这棱锥的高的中点，作一个平行于底面的截面，这个截面的面积是多少？
4. 棱锥的底面积是 $150cm^2$，平行于底面的一个截面面积是 $54cm^2$，底面和这个截面的距离是 12cm，求这棱锥的高。
5. 画出底面边长是 20cm，高是 50cm 的正五棱锥的直观图和侧面展开图。
6. 画出各棱都等于 5 cm 的正三棱锥的直观图。
7. 正三棱锥的底面边长是 a，高是 $2a$，求它的全面积。
8. 一座仓库的屋顶呈正四棱锥形，底的边长 2.7m，侧棱长 2.3m，如果要在房顶上铺一层油毡纸，需要油毡纸多少（精确到 $0.1m^2$）？
9. 要做一个正六棱锥形的铁烟囱帽，底口边长 40cm，高是 50cm，需要多少铁皮？

10. 求证：平行于三棱锥的两条相对棱的平面截三棱锥的截面是平行四边形。



(第 10 题)

2.4 棱台

1. 棱台的概念、性质和画法

棱锥的底面和平行于底面的一个截面之间的部分叫做**棱台**. 这两个平行的面叫做**棱台的底面**，原棱锥的底面叫做**下底面**，截面叫做**上底面**. 其他各面叫做**棱台的侧面**. 两个相邻侧面的公共边叫做**棱台的侧棱**. 两个底面之间的距离（图 2-16 的 $O'O$）叫做**棱台的高**.

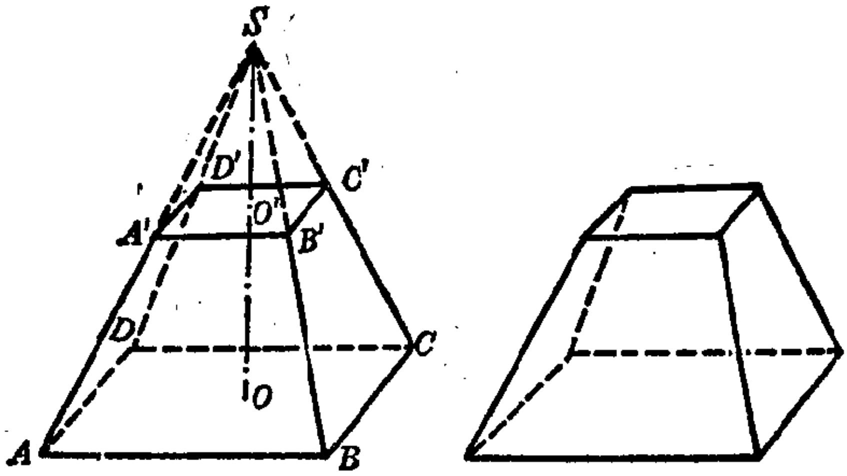


图 2-16

棱台可用表示上、下底顶点的字母来表示. 如图 2-16 的棱台可记作棱台 AC'.

棱台有下面的一些性质:

1. 棱台的两个底面是相似多边形.

2. 棱台的各个侧面都是梯形.

3. 棱台的各条侧棱延长后相交于一点.

由三棱锥、四棱锥等等截得的棱台分别叫做**三棱台**、**四棱台**等等.

由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**.

正棱台有下面一些性质:

1. 正棱台的侧面是全等的等腰梯形,各等腰梯形的高相等,它叫做正棱台的斜高.

2. 正棱台的两个底面是边数相同的正多边形.

3. 正棱台两底面中心连线(正棱台的高),两底面相应的边心距,两底面相应的边的中点的连线(正棱台的斜高)组成直角梯形.

例 1 正四棱台的高是 17cm,两底面的边长分别是 4cm 和 16cm. 求这个棱台的侧棱长和斜高.

解: 如图 2-17,设两底面的中心分别是 O' 和 O, $B'C'$ 和 BC 的中点分别是 K' 和 K,那么 $O'O$、$K'K$ 分别是棱台 AC' 的高和斜高, $CBB'O'$ 和 $OKK'O'$ 是两个直角梯形.

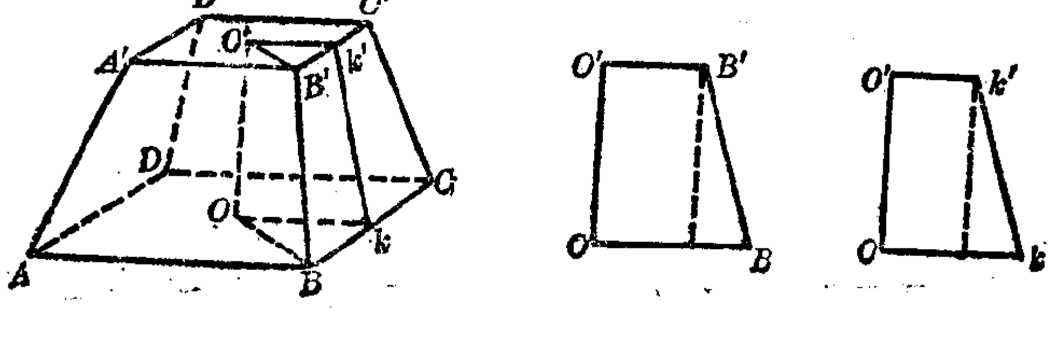


图 2-17

上底面 $A'B'C'D'$ 的边长是 4 cm, 所以 $O'B'=2\sqrt{2}$ cm, $O'K'=2$cm. 下底面 $ABCD$的边长是 16cm, 所以$OB=8\sqrt{2}$ cm, $OK=8$cm. 因此

$$B'B=\sqrt{17^2+(8\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2}=19(\text{cm}),$$

$$K'K=\sqrt{17^2+(8-2)^2}=5\sqrt{13}(\text{cm}).$$

这棱台的侧棱长是 19cm, 斜高是 $5\sqrt{13}$cm.

例 2 设棱台的两底面积分别是 S、S', 它的中截面(与两底等距离的截面)面积为 S_0(图 2-18). 求证:

$$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}.$$

证明: 因棱台的中截面与两底面平行, 所以多边形 $ABCDE \backsim A_0B_0C_0D_0E_0 \backsim A'B'C'D'E'$.

$$\frac{S}{S_0}=\frac{AB^2}{A_0B_0^2},$$

$$\frac{S'}{S_0}=\frac{A'B'^2}{A_0B_0^2},$$

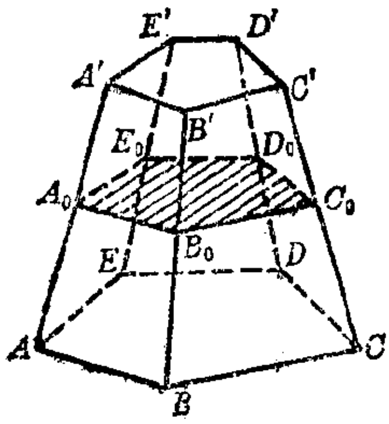


图 2-18

也就是

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_0}}=\frac{AB}{A_0B_0},\quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S_0}}=\frac{A'B'}{A_0B_0}.$$

上面等式两边分别相加, 因 A_0B_0 是梯形 $ABB'A'$ 的中位线,

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S'}}{\sqrt{S_0}}=\frac{AB+A'B'}{A_0B_0}=\frac{2A_0B_0}{A_0B_0}=2.$$

由此得到

$$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}.$$

例 3　有一个正四棱台，下底面边长 26mm，上底面边长 16mm，高 8 mm；画它的直观图.

解：1）定比例尺为 1:1，画轴 Ox、Oy、Oz.

2）画两个位似的正方形，以它们的中心为位似中心，边长分别是 26mm 和 16mm（图 2-19 甲）.

在水平面 xOy 内画出它们的直观图（图 2-19 乙）.

3）从图 2-19 乙中的小平行四边形的各顶点画 Oz 的平行线段，长为 8mm，画出上底（图 2-19 丙）.

4）画侧棱，并加以整理即得正四棱台直观图（图 2-19 丁）.

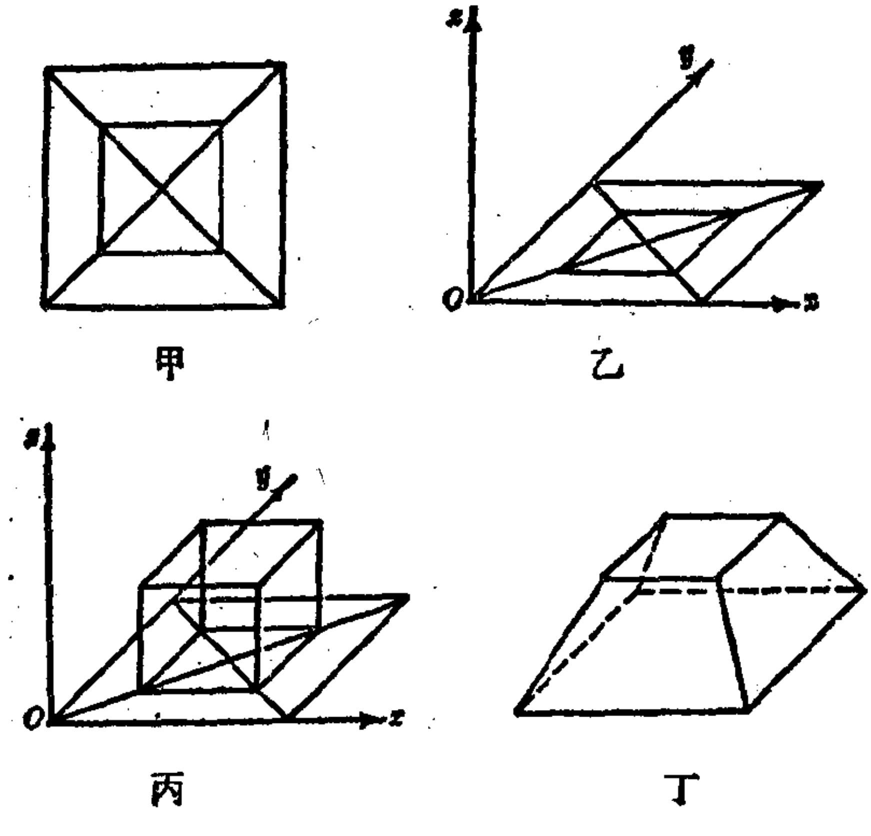


图　2-19

练　习

1. 已知正三棱台上下底面的边长和侧棱的长分别是 a、b 和 c. 求它的高和斜高.

2. 图示多面体、凸多面体、棱柱、棱锥、棱台、平行六面体各集合的包含关系.

2. 正棱台的侧面积

图 2-20 是正棱台和它的侧面展开图. 它的侧面展开图是由几个等腰梯形组成的，每一个梯形的上底和下底分别是正棱台上底面和下底面多边形的边，两腰是正棱台的侧棱. 设正棱台的斜高是 h'，上、下底面的周长分别是 c'、c，那么它的侧面积是

$$S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'.$$

棱台的全面积是它的侧面积与上、下底面积的和.

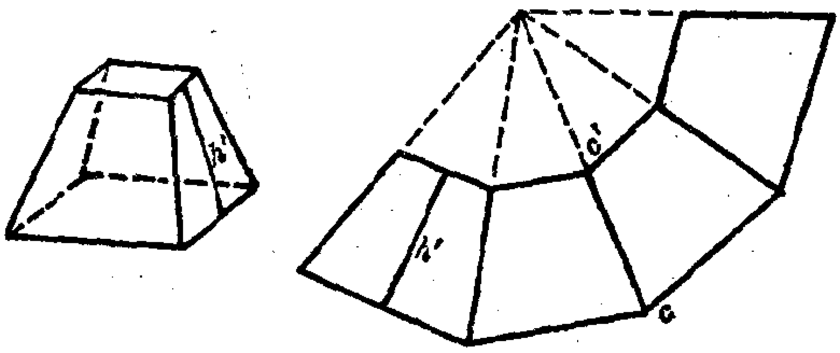
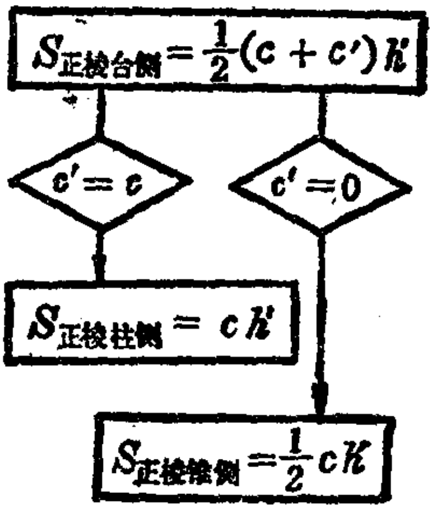


图 2-20

在正棱台的侧面积公式中，如果设 $c'=c$，就得到正棱柱的侧面积公式: $S_{\text{正棱柱侧}}=ch'$ （h' 是高）. 如果设 $c'=0$，就得到正棱锥的侧面积公式: $S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'$. 因此，正棱柱、正棱锥、正棱台侧面积公式的关系可表示如右图.



习 题 九

1. 用厚纸制作一个上、下底面的边长分别是 3 cm、5 cm，高是 4 cm 的正四棱台的模型.

2. 正四棱台上下底面的边长分别是 a 和 b，侧棱和底面成 45° 的角，求它的侧棱的长和斜高.

3. 一个正三棱台的上、下底面的边长分别是 3 cm、5 cm，侧面与底面成 60° 二面角，求它的斜高.

4. 一个正四棱台的上、下底的边长各为 a、b，高为 h. 求经过相对侧棱的截面面积.

5. 把一个棱锥用平行于底面的平面截成棱台，使棱台上、下底面积的比为 1:2，应截在何处？

6. 画出上、下底面边长各为 50cm、75cm，高为 125cm 的正六棱台的直观图.

7. 工地常用的运输拖斗是正四棱台形，已知它的两底的边长分别是 90cm、60cm，高是 65cm，计算制造这样的拖斗需要多少铁板.

8. 已知正六棱台的两底边长分别是 a、$2a$，高是 a，求这个正六棱台的侧面面积.

9. 正四棱台的上、下底面的边长各为 a、b，侧面积等于两底面积的和，它的高是多少？

10. 把一个正棱锥用平行于底面的平面，经过高的中点截断，求两部分的侧面积的比.

11. 棱台的上下底面的面积各是 Q_1 和 Q. 求证：这个棱台的高和截得这个棱台的原来棱锥的高的比是

$$\frac{Q-\sqrt{QQ_1}}{Q}.$$

2.5 圆柱

1. 圆柱的概念和性质

我们常见的圆钢、转轴等都是圆柱形.

矩形以它的一边所在直线为旋转轴，旋转一周形成的面所围成的几何体叫做**圆柱**. 旋转轴叫做它的**轴**. 在轴上这个边的长度叫做它的**高**. 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它的**底面**，另一边旋转而成的曲面叫做它的**侧面**. 在侧面上各个位置的边叫做**侧面的母线**(图 2-21).

圆柱可以用它的两个底面上的各一个字母来表示，如图 2-21 的圆柱记作圆柱 BA'.

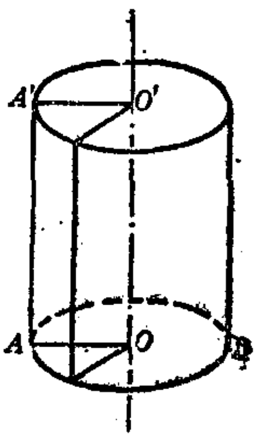


图 2-21

圆柱有下面的性质:

1. **平行于底面的截面是和底面相等的圆.**

2. **过轴的截面(轴截面)是矩形.**

例 有一圆柱形树干，长 1.5m，从离开轴 6.0cm 的地方，平行于轴锯开，截底面所得的弧是 120°，求锯面的面积.

解: 如图 2-22，$A'B'BA$ 是锯面. 在底面 $\odot O$ 内，作 $OD \perp AB$，那么 $OD=6.0\text{cm}$；并且 OD 平分 $\angle AOB$. 因为 AB 所对的弧是120°，所以 $\angle AOB=120°$，$\angle AOD=60°$.

$\therefore \quad AB=2AD$

$$=2\cdot OD\cdot \mathrm{tg}AOD$$
$$=2\times 6.0\mathrm{tg}60^\circ$$
$$=12\sqrt{3}.$$

$\therefore\quad S_{A'B'BA}=AA'\cdot AB=150\times 12\sqrt{3}$

$\approx 3.1\times 10^3(\mathrm{cm}^2).$

这锯面的面积约是 $3100\,\mathrm{cm}^2$.

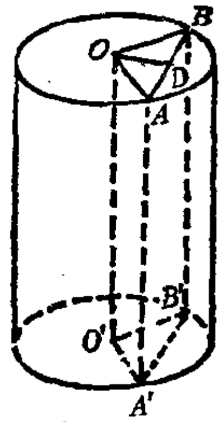


图 2-22

练 习

已知圆柱的底面半径是 2 m，高是 3 m，求它的轴截面的对角线长.

2. 圆柱的侧面积

图 2-23 是圆柱和它的侧面展开图，它的侧面展开图是一个矩形，这个矩形一边的长是底面圆的周长 $c=2\pi r$（r 是底面半径）. 另一边的长是圆柱的高 l（即母线长）. 于是

$$S_{\text{圆柱侧}}=cl=2\pi rl.$$

圆柱的全面积是它的侧面积与两个底面面积的和.

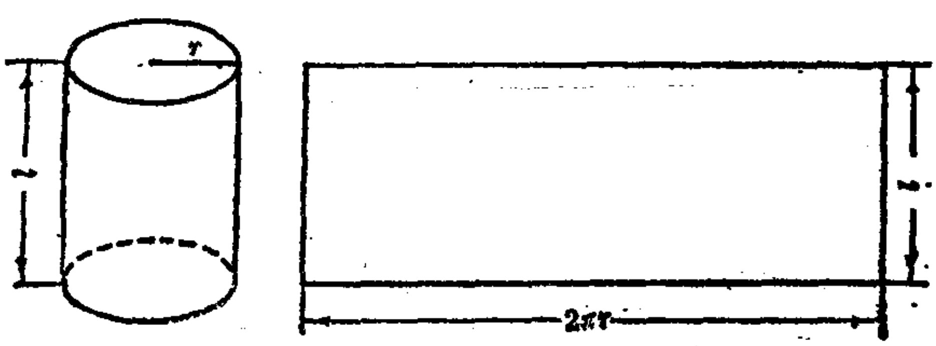


图 2-23

习 题 十

1. 圆柱的三条母线，两两之间的距离是13cm、5cm和12cm，求圆柱的底面半径.
2. 高和底面直径相等的圆柱叫做等边圆柱. 一个等边圆柱的轴截面的面积是Q，求它的一个底面的面积.
3. 圆柱的一个内接直三棱柱的一个侧面经过圆柱的轴. 求证：这个棱柱的其它两个面互相垂直.
4. 圆柱底面半径是r，侧面积等于一个底面面积的3倍，求这个圆柱的高.
5. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，求证这个圆柱的侧面积等于一个底面面积的4π倍.
6. 一个圆柱形锅炉，底面直径是$d\approx 1.0$米，高是$h\approx 2.3$米，锅炉用钢板制造，焊接面积等于圆柱全面积的10%，求全部钢板的面积.

2.6 圆锥

1. 圆锥的概念和性质

车床上顶尖的头部、刚用卷笔刀修好的圆铅笔尖等都给我们以圆锥的形象.

直角三角形以它的一直角边所在的直线为旋转轴，旋转一周形成的面所围成的几何体叫做**圆锥**. 旋转轴叫做它的**轴**. 在轴上这个边的长度叫做它的**高**. 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它的**底面**. 另一边旋转而成的曲面叫做它的**侧面**. 在侧面上各个位置的边叫做**侧面的母线**(图 2-24).

圆锥可以用它的顶点以及它底面上的三个点的字母来表示，如图 2-24 的圆锥可以记作圆锥 $S\text{-}ABC$，或简记作圆锥 S.

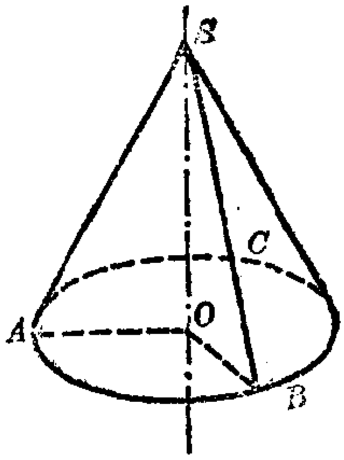


图 2-24

圆锥有下面的性质：

1. **平行于底面的平面截圆锥所得的截面是圆．截面和底面的半径的比等于从顶点到截面和从顶点到底面的距离的比.**

2. **过轴的截面(轴截面)是等腰三角形.**

例 设圆锥 S 的高是 10cm．截面 SAB 与底面成 45° 的二面角，它把底面圆周截去 $\frac{1}{4}$，求截面的面积(图 2-25).

解： 设 O 是高 SO 的垂足，$OE\perp AB$ 垂足为 E，那么 $SE\perp AB$，$\angle SEO=45°$.

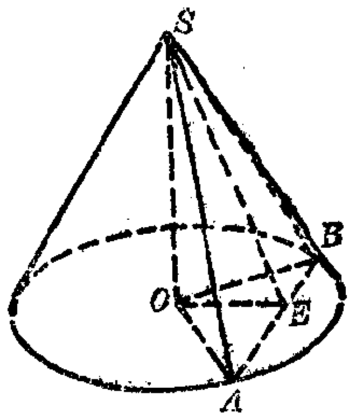


图 2-25

$\because \quad OE=SO=10,$

$\therefore \quad SE=10\sqrt{2}.$

$\because \quad \angle AOB=90°,$

$\therefore \quad \angle AOE=45°,$

$AB=2AE=2OE=20.$

因此，$S_{SAB}=\frac{1}{2}AB\cdot SE$

$$=\frac{1}{2}\times 20\times 10\sqrt{2}=100\sqrt{2}\,(\text{cm}^2).$$

练 习

圆锥的高是 16cm，底面的面积是 512cm²，平行于底面的截面的面积是 50cm²，求截面与顶点的距离。

2. 圆锥的侧面积

图 2-26 是圆锥和它的侧面展开图. 侧面展开图是一个扇形，扇形的半径是圆锥的母线长 l，扇形的弧长是圆锥底面的周长 c. 如果圆锥底面的半径是 r，那么圆锥的侧面积是

$$S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.$$

圆锥的全面积是它的侧面积与底面积的和.

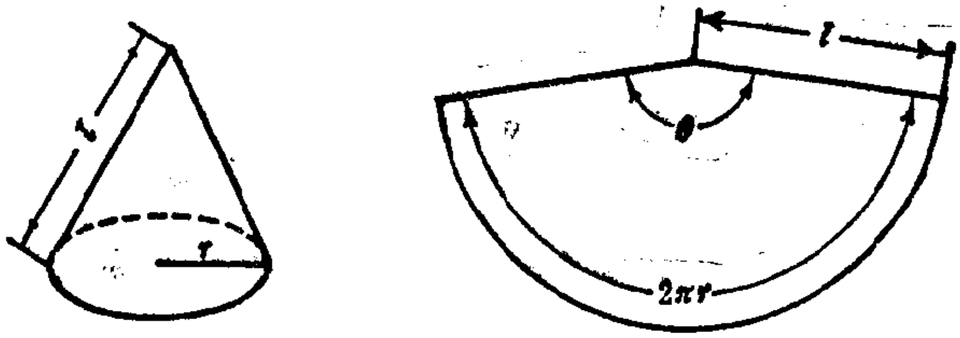


图 2-26

例 2 求图 2-26 中圆锥侧面展开图的中心角 θ.

解:

$$\theta=\frac{2\pi r}{l}\times\frac{180^\circ}{\pi}$$

$$=\frac{r}{l}\times 360^\circ.$$

习 题 十 一

1. 用厚纸制作底面半径是 6cm，高是 8cm 的圆锥模型.

2. 轴截面是等边三角形的圆锥叫做**等边圆锥**. 一个等边圆锥的底面积是 Q, 求它的高.

3. 在圆锥的一个轴截面内的两条母线间的角, 叫做**圆锥的顶角**. 一个圆锥的顶角是直角, 母线的长是 8cm, 求这个圆锥的底面直径.

4. 已知圆锥的底面半径是 4cm, 母线长是 7cm, 有一条平行于轴的直线和轴相距 3 cm, 求这条直线和圆锥侧面的交点到底面和顶点的距离.

5. 将半径为 r 的圆形薄铁板截成全等的三个扇形, 做成三个圆锥筒. 求圆锥筒的高.

6. 圆锥的底面半径是22.35m, 高是 29.8m, 求这个圆锥的侧面积(精确到 $10m^2$).

7. 一个圆锥的高是 10cm, 侧面展开图是半圆, 求圆锥的侧面积.

8. 圆锥的轴截面是正三角形. 求证: 它的侧面积是底面积的 2 倍.

2.7 圆台

1. 圆台的概念和性质

粮囤、热水瓶的瓶塞都给我们以圆台的形象.

直角梯形以它的垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴, 旋转一周形成的面所围成的几何体叫做**圆台**. 旋转轴叫做它的**轴**. 在轴上这个边的长度叫做它的**高**. 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它的**底面**. 另一边旋转而成的曲面叫做**侧面**. 侧面上各个位置的边叫做**侧面的母线**(图 2-27).

很明显，圆台也可以看做是用平行于圆锥底面的平面截这个圆锥而得到的。

圆台可以用它两个底面上而不在同一条母线上的两个点的字母来表示，如图 2-27 的圆台可以记作圆台 BA'.

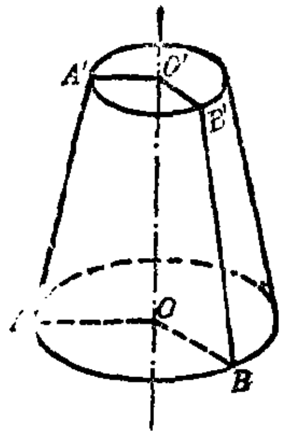


图 2-27

圆台有下面的性质：

1. **平行于底面的截面是圆.**

2. **圆台的各条母线的延长线相交于一点.**

3. **过轴的截面(轴截面)是等腰梯形.**

例 有一个高 18cm，底面直径是 12cm 的圆锥，要截成上底面面积是 $16\pi\,cm^2$ 的圆台. 求截成的圆台的高度.

解：如图 2-28，设 $S\text{-}ABC$ 和 $S\text{-}A'B'C'$ 分别是原来的圆锥和要截去的部份，SO 和 SO' 分别是它们的高，R 和 r 分别是它们的底面半径.

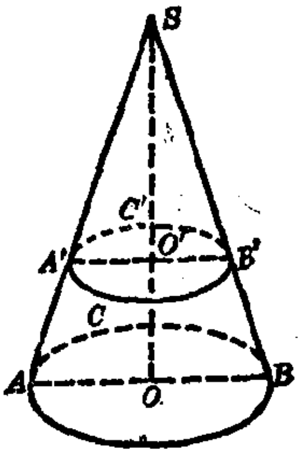


图 2-28

$\because \quad \pi r^2=16\pi,$

$\therefore \quad r=4.$

$$\frac{r}{R}=\frac{SO'}{SO},$$

就是 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{SO'}{18}.$

$\therefore \quad SO'=12,\ OO'=18-12=6(\text{cm}).$

截得的圆台的高是 6 cm.

练　习

圆台两个底面的半径分别是 3 cm和 7 cm，母线的长是 5cm，求它的轴截面的面积。

3. 圆台的侧面积

图 2-29 是圆台和它的侧面展开图．设圆台的上下底周

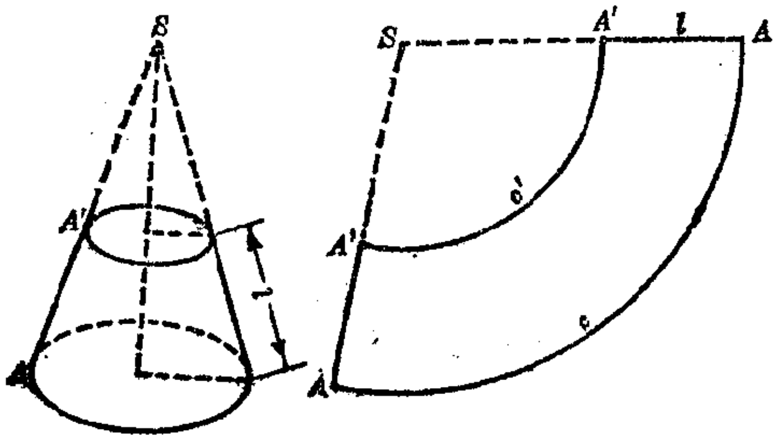


图　2-29

长分别是 c' 和 c，半径分别是 r' 和 r，母线的长是 l．把圆台补成一个圆锥，设圆锥的顶点是 S．这个圆锥的侧面展开图就是一个以 S 为圆心的扇形．以圆台的上底为底的圆锥的侧面展开图是一个小扇形．大扇形的弧长是圆台的下底的周长 c，小扇形的弧长是上底的周长 c'．圆台的侧面展开图就是大扇形去掉小扇形后余下的部分．

由于 c' 和 c 所对的圆心角相同，所以

$$\frac{SA-l}{SA}=\frac{c'}{c}.$$

由此可得：

$$SA=\frac{cl}{c-c'},\quad SA-l=\frac{c'l}{c-c'}.$$

因此圆台的侧面积是:

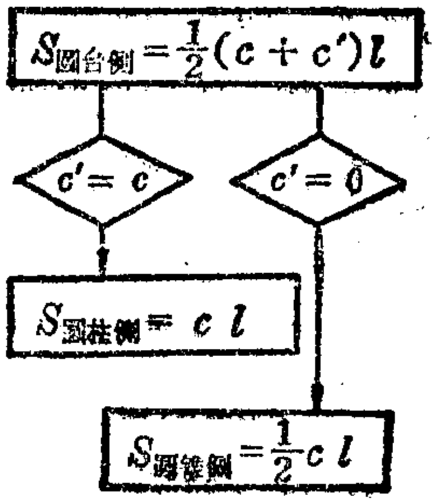
$$
\begin{aligned}
S_{\text{圆台侧}} &= \frac{1}{2}SA\cdot c - \frac{1}{2}(SA-l)\cdot c' \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2 l}{c-c'} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c'^2 l}{c-c'} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(c^2-c'^2)l}{c-c'} \\
&= \frac{1}{2}(c'+c)l \\
&= \pi(r'+r)l.
\end{aligned}
$$

由此我们得到

$$
\boxed{S_{\text{圆台侧}} = \frac{1}{2}(c+c')l = \pi(r+r')l.}
$$

圆台的全面积是它的侧面积与两个底面积的和.

在圆台的侧面积公式中, 如果设 $c'=c$, 就得到圆柱侧面积公式: $S_{\text{圆柱侧}}=cl$. 如果设 $c'=0$, 就得到圆锥侧面积公式: $S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl$. 因此, 这两个公式和圆台侧面积公式的关系可表示如右图.



练　习

1. 求图 2-29 中圆台侧面展开图扇形的中心角 θ.
2. 一个圆台的全面积等于 $572\pi\text{m}^2$, 两底半径是 6 m 和 14m, 求它的高.

2.8 圆柱、圆锥和圆台的直观图

圆柱、圆锥、圆台的底是圆，它的直观图画法在第一章已经讲过，圆形物体的直观图常用正等测画法来画. 先画轴 Ox、Oy、Oz，Ox、Oy 和 Oz 都成 $120°$ 角（图 2-30）. xOy 平面表示水平面，Oz 表示和水平面垂直的方向. 当圆柱、圆锥、圆台的底面在水平位置时，直观图的下底面是 xOy 平面内的一个椭圆. 这个椭圆可按 1.3 节的近似方法来画. 圆柱、圆锥、圆台的高和 Oz 方向相同，长度不变.

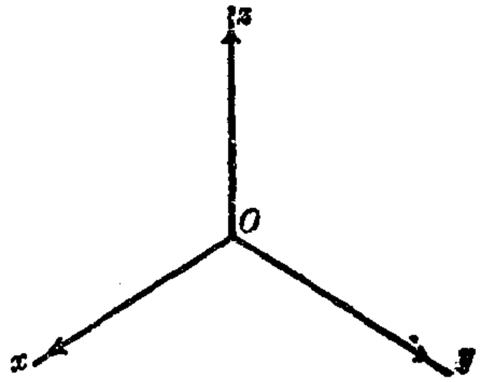


图 2-30

根据这种方法画得的直观图，凡是和 Ox、Oy、Oz 平行的线段的长，都分别等于实物上对应线段的实际长度. 如果直观图是按某一比例尺来画时，那么和 Ox、Oy、Oz 平行的线段的长，就分别是实物上对应线段的实际长度按这个比例尺缩小或放大的线段长.

例 一个圆台的上下底面半径分别是 0.6 cm 和 1 cm，高是 1.7 cm，画这圆台的直观图.

解： 1）画轴 Ox、Oy、Oz 夹角都是 $120°$（图 2-31 甲）.

2）在 xOy 平面上以 O 为圆心，画出表示半径是 1 cm 的圆的近似椭圆，这就是圆台的下底面.

3）在 Oz 上取 $OO'=1.7$ cm，经过 O' 画 Ox、Oy 的平行线，作为上底面轴线的对应轴，以 O' 为圆心，画出表示半径是 0.6 cm 的圆的近似椭圆，这就是圆台的上底面.

4）画两个椭圆的两条外公切线，加以整理，即得圆台直观图(图 2-31 乙)。

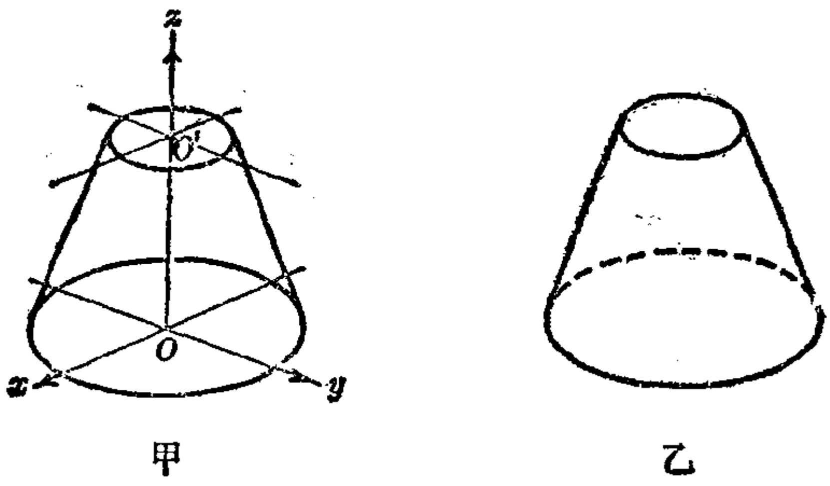


图 2-31

练 习

画出底面直径是 10cm，高是 15cm 的圆锥的直观图。

习题十二

1. 把一个圆锥截成圆台，已知圆台的上、下底面半径的比是 1:4，母线长是10cm，求圆锥的母线长(精确到 0.1cm)。
2. 圆台的两个底面面积分别是 $4\pi m^2$ 和 $16\pi m^2$，求它的中截面的面积。
3. 一个直角梯形的上、下底和高的比为$1:2:\sqrt{3}$，直角梯形旋转成一个圆台，求这个圆台的上、下底面积与侧面积的比。
4. 某工厂准备制造高 33cm、上口直径 30cm、下口直径 20cm 的圆台形水桶 100 个，一共需要多少铁皮(损耗不计在内)？

5. 已知圆台上、下底面半径是 r'、r，它的侧面积等于两底面积的和，求圆台的母线长.

6. 圆台的上、下底面半径分别是 r'、r，母线长是 l，已知 $r:r':l=2:1:3$，这个圆台的侧面积是 $144\pi\,cm^2$，求 r、r'、l.

7. 画出底面半径是 4cm、高是 12cm 的圆柱为直观图.

2.9 球

1. 球的概念、性质和画法

滚珠、篮球、乒乓球等都给我们以球的形象.

半圆绕着它的直径旋转一周所成的曲面叫做**球面**. 球面所围成的几何体叫做**球体**，简称**球**. 这个半圆的圆心叫做**球心**. 连结球心和球面上一点的线段叫做**球的半径**. 连结球面上两点并且经过球心的线段叫做**球的直径**. 旋转过程中在各个位置上的半圆叫做**球面的母线**(子午线)，半圆上的点旋转所成的圆叫做**球面的平行圆**(图 2-32).

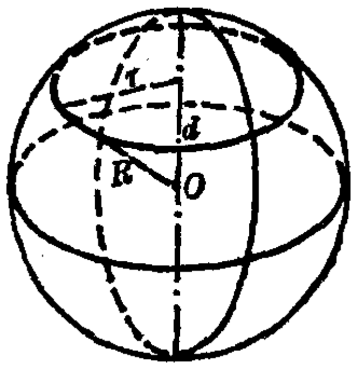


图 2-32

球面也可以看做是与球心距离等于半径的点的集合（轨迹).

一个球可以用表示它的球心的字母来表示，例如“球 O”.

球的截面有下面的性质:

1. **球被平面所截得的截面是一个圆面;**

2. **球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面的半径 r,**

有下面的关系：

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

球面被经过球心的截面截得的圆叫做**大圆**，被不经过球心的截面截得的圆叫做**小圆**.

球面上两点间的最短距离，就是经过这两点的大圆被它们所分成的两个弧中较小一个的弧长，例如图 2-33 中的 $\overset{\frown}{PQ}$. 因此，在现代的航空、航海中，飞机、轮船都是沿着大圆弧航线进行.



图 2-33

地球可以近似地看作一个球，在地球面上从北极到南极的半大圆(子午线)叫做**经线**，赤道是垂直于地轴的大圆，它的平行圆是小圆，叫做**纬线**. 把赤道分成 360°，子午线分成 180°，就构成经纬线的度数(图 2-34). 赤道是 0° 纬线，过伦敦格林威治天文台的子午线是 0° 经线，北南回归线之间的部分是热带，北(南)回归线和北(南)极圈之间的部分是北(南)温带，其余部分是北(南)寒带. 例如我国领土大部位于北温带，我国首都北京位于东经116°24′，北纬39°54′.

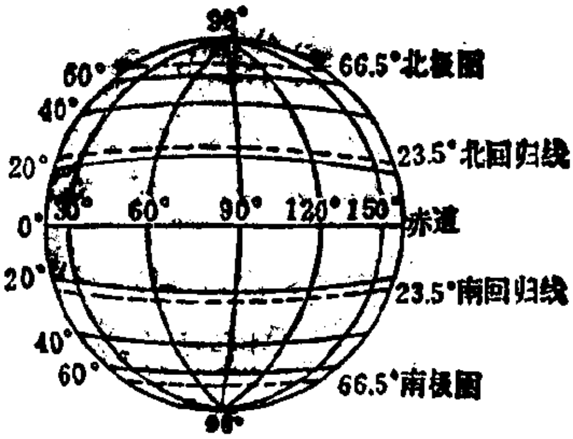


图 2-34

例 1 我国首都北京靠近北纬 40°. 求北纬 40° 纬线的长度约为多少 km(地球半径约 6370 km).

解： 设北京在北纬 40° 线上的点 A 处，AK 是北纬 40°纬

线的半径(图 2-35)，则 $\triangle OAK$ 是直角三角形. 用 c 表示北纬 40° 纬线的长度.

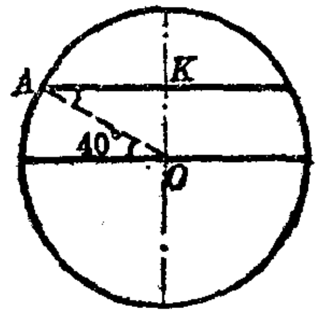


图 2-35

$$\begin{aligned} c &= 2\pi \cdot AK = 2\pi \cdot OA \cdot \cos OAK \\ &= 2\pi \cdot OA \cdot \cos 40^\circ \\ &\approx 2 \times 3.142 \times 6370 \times 0.7660 \\ &\approx 3.066 \times 10^4 (\text{km}). \end{aligned}$$

所以北纬 40° 纬线长度约为 3.066×10^4km.

2. 球的直观图

画球的直观图，一般用正等测画法，这时球的轮廓是一个圆.

例 2 画半径为 R 的球的直观图.

画法: 1) 定比例尺, 画轴 Ox、Oy、Oz 使轴间角为120°.

2) 画球面大圆 在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取线段 OA、OB、OC, 使 $OA=OB=OC=R$. 以 OA、OB、OC 中每两个为共轭半径画三个椭圆.

3) 成图 以 O 为圆心画和这三个椭圆同时相切的外切圆. 把被遮住部分改为虚线, 就得到球的直观图 (图 2-36).

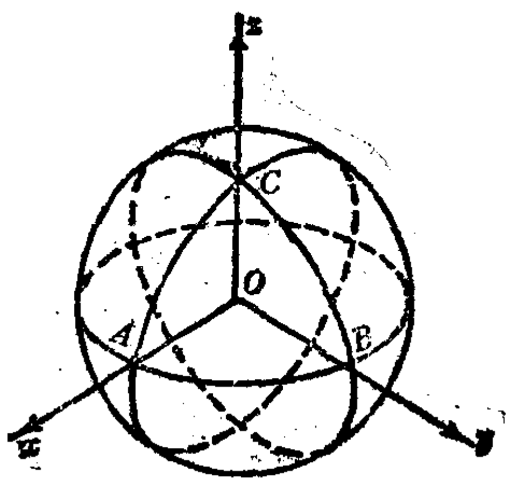


图 2-36

3. 球的面积

由于球面不能展在平面上, 球的面积无法用展开图来求. 为求球面面积, 我们先证明一个预备定理:

定理 球面内接圆台(上、下底圆周是球的两个平行圆)

的高为h，球心到母线的距离为p，那么圆台侧面积为$2\pi ph$.

证明：画出过圆台的轴的截面图（图2-37）．从圆台上底的点C向下底作垂线CC'，从母线AD的中点E向轴引垂线EE'．这时，两个直角三角形BCC'和OEE'的对应角相等（为什么？），所以$\triangle BCC' \backsim \triangle OEE'$.

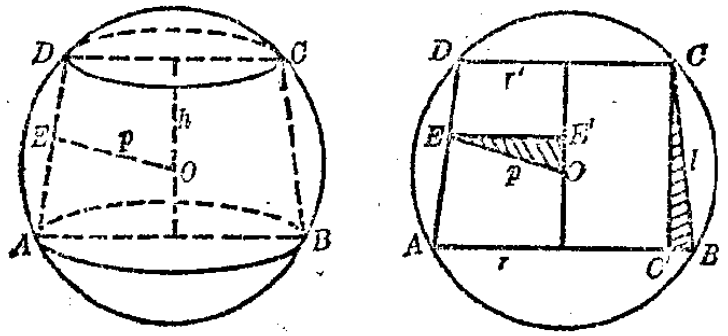


图 2-37

设圆台的上、下底半径为r'、r，母线长为l，则$EE'=\frac{1}{2}(r+r')$,

$$\therefore \quad l:h=p:\frac{1}{2}(r+r'), \quad l(r+r')=2ph.$$

代入圆台侧面积公式，得到

$$S_{\text{圆台侧}}=\pi(r+r')l=2\pi ph.$$

注意，这个结果对于球的内接圆柱、圆锥同样成立.

其次，考虑下面方法求球的面积.

如图2-38，将半径为R的半球面上的半大圆ANB分成$2n$等分，用过各分点的平行平面将半球分为n部分，以截得的平行圆为底作圆台、圆锥，设它们的高分别是h_1、h_2、…、h_n．球心到它们的母线的距离为p，根据上面的结果，这些圆台、圆锥的侧面积的和为

$$S=2\pi p h_1+2\pi p h_2+\cdots+2\pi p h_n$$
$$=2\pi p(h_1+h_2+\cdots+h_n)$$
$$=2\pi pR.$$

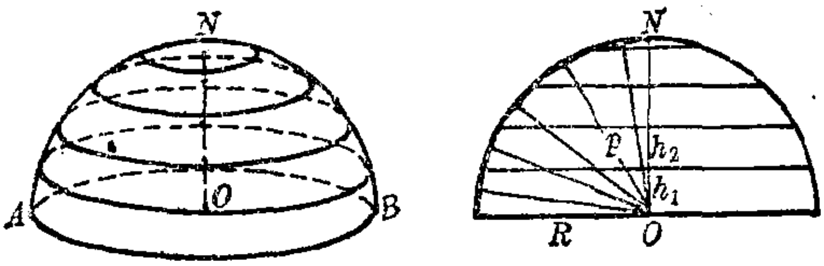


图 2-38

如果分点无限地增加，侧面就无限接近于半球面，而p近于R. 我们把p变为R时的侧面积和作为半球面的面积. 于是半球面的面积是$2\pi R^2$，由此得

定理　球面面积等于它的大圆面积的四倍. 即

$$S_{球面}=4\pi R^2.$$

这样求面积的思想，是我们将要学习的微积分的思想基础.

例 3　有一地球仪，它的半径是0.60m，如果每油漆$1m^2$需油漆150g，这样一个地球仪要重新油漆一次，需多少油漆？

解：$S_{球}=4\pi R^2=4\pi\cdot(0.60)^2\approx 4.52,$

$$4.52\times 150\approx 6.8\times 10^2(g).$$

重新油漆一次约需油漆6.8×10^2g.

练　习

1. (1) 如果球的半径扩大4倍，它的面积变化怎样？

(2) 如果球的大圆面积扩大n倍，球面积的变化怎样？

2. 地球的半径约是 6.37×10^3km, 求地球面积。

2.10 球 冠

观察天象的天文台的屋顶(图 2-39), 光学透镜和反射镜的凹凸面, 都呈球冠的形状.

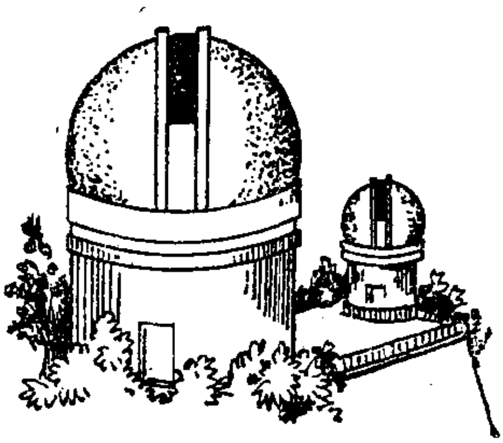


图 2-39

球面被平面所截下的一部分叫做**球冠**, 截得的圆叫做**球冠的底**. 垂直于截面的直径被截下的一段叫做**球冠的高** (图2-40).

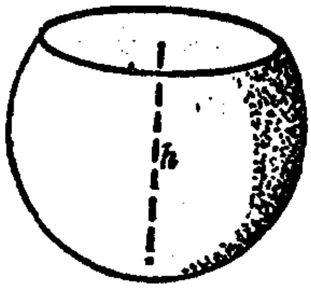


图 2-40

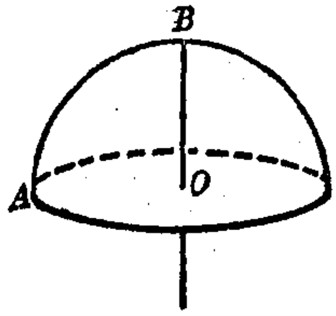


图 2-41

球冠也可以看作一段圆弧绕经过它一个端点的直径旋转一周所成的曲面(图 2-41).

求球冠面积, 可完全依照求半球面面积的方法. 将图 2-38 看作球冠, ON 看作球冠的高, 用 h 表示, 球的半径用 R 表示, 可得球冠的面积

$$S_{球冠}=2\pi Rh.$$

这个公式, 对于半球面、小于、大于半球面的球冠、整个球面都成立, 例如用 $2R$ 代 h, 就得到球面面积 $4\pi R^2$.

例 1 如果电视卫星距地球球心 3.58×10^4 km，求卫星上电波直射到地球上的面积.

解：经过球心 O 和卫星 P 作平面．设 PA 和 PB 是截得的大圆的切线，OP 和 AB 相交于 C、和大圆相交于 D（图 2-42）．从点 P 所发出电波能射到的球面部分，是经过 C 而垂直于 OC 的平面截球面所得的球冠 DAB.

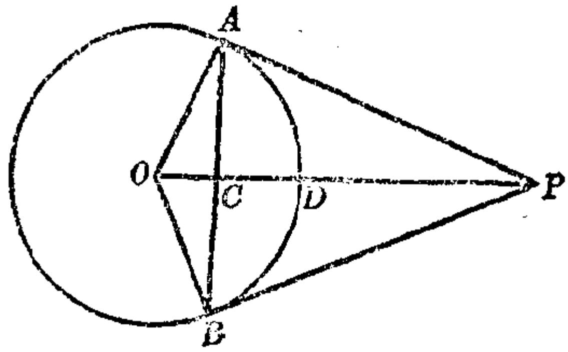


图 2-42

$$\because\quad OA\perp AP,\ AC\perp OP,$$

$$\therefore\quad OA^2=OC\cdot OP.$$

$$OC=\frac{OA^2}{OP}=\frac{6370^2}{35800}\approx1133,$$

$$CD=OD-OC\approx6370-1133=5237.$$

$$S_{球冠}=2\pi Rh\approx2\times3.142\times6370\times5237$$

$$\approx2.10\times10^8(\text{km}^2).$$

卫星上电波直射到地面部分的面积约是 2.10×10^8 km².

例 2 我国土地辽阔，大部位于地球北温带，共有土地 $9.60\times10^6\text{km}^2$．我国领土占北温带面积的百分之几？

解：为了明显，用断面图（图 2-43）．圆 O 表示垂直于赤道的大圆，N 表示北极，G 表示赤道上一点，A、B 表示北回归线上的点，C、D 表示北极圈上的点．$CD\parallel AB$，$ON\perp AB$、ON

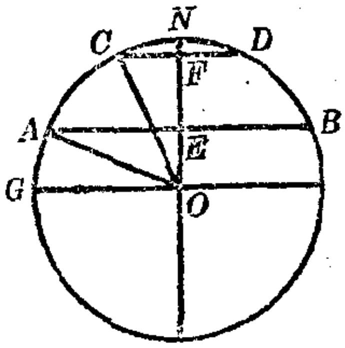


图 2-43

$\perp CD$. 北温带的面积是

$$S_{北温带}=S_{球冠\ ABN}-S_{球冠\ CDN}$$
$$=2\pi R\cdot EN-2\pi R\cdot FN$$
$$=2\pi R(EN-FN)$$
$$=2\pi R(OF-OE).$$

$\because$ $OF-OE=OC\cdot\sin OCF-OA\cdot\sin OAE$
$$=6.37\times10^3\cdot(\sin66.5°-\sin23.5°)$$
$$=6.37\times10^3\cdot(0.9171-0.3987)$$
$$\approx3.302\times10^3(\text{km}),$$

$\therefore$ $S_{北温带}=2\times3.142\times6.37\times10^3\times3.302\times10^3$
$$\approx1.32\times10^8(\text{km}^2)$$
$$\frac{9.60\times10^6\times100}{1.32\times10^8\times100}\approx7.27\%.$$

我国领土约占北温带面积的 7.27%.

最后我们指出旋转体的一般概念.

线绕旋转轴旋转所成的面叫做**旋转面**，封闭的旋转面所围成的几何体叫做**旋转体**.

例如，圆柱、圆锥、圆台、球都是旋转体；它们的侧面、表面都是旋转面，球冠也是旋转面.

又如，圆 O 绕它所在平面上与它不相交的轴 l 旋转所成的旋转面，叫做**环面**，环面围成的体叫做环体或简称环（图 2-44）. 充气车轮内胎就呈环形.

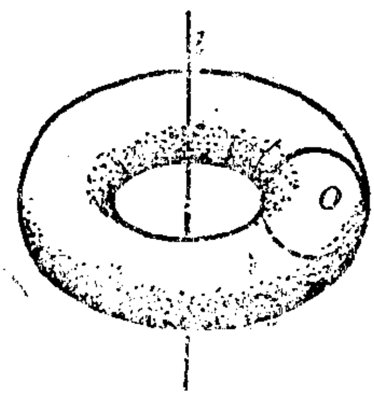


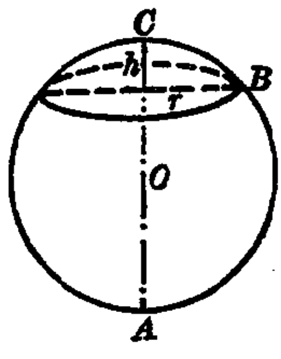
图 2-44

练　习

球冠面积是截得它的球面面积的$\frac{1}{10}$，球冠的高是球的直径的几分之几？

习题十三

1. 海面上，地球球心角$1'$所对的大圆弧长约为1海里，1海里约是多少公里？
2. 某地位于北纬18°，地球自转1小时该地转多少路程？
3. 已知球面上两点的球面距离是8πcm，经过这两点的两条半径间的夹角是60°，求这个球的半径.
4. 在赤道上，东经140°与西经130°的海面上两点为A、B，A与B之间的最短距离是多少海里？
5. 画半径是3 cm的球的直观图.
6. 试证半径为R的球面面积，等于底面直径和高都是$2R$的圆柱的侧面积.
7. 已知球的大圆的周长是80 cm，求这个球的面积.
8. 求证：$S_{球冠}=\pi(r^2+h^2)$，其中r是球冠的底的半径，h是高.
9. 求地球上热带的面积.



（第8题）

10. 半径是2 cm的球面被一个平面截得的截面半径是1cm，求所截得的两个球冠的面积.

11. 有直径为 10 cm的球，以它的一条直径为轴，钻一个直径为 6 cm 的圆孔，求这个球的球面剩余部分的面积.

二　多面体和旋转体的体积

2.11　体积的概念

在生产建设和科学实验中，经常遇到计算体积的问题. 例如，计算土方、器皿的容积以及物体的重量等.

几何体所占有的空间的大小，叫做它的**体积**. 为了度量一个体的体积，我们取每条棱的长等于单位长(如 1 米、1 厘米等)的正方体的体积作为体积的单位，这个正方体叫做**单位正方体**.

作为计算体积的理论基础，我们把下面的两个事实当作公理.

公理 5　长方体的体积等于它的长、宽、高的积.

推论 1　长方体的体积等于它的底面积和高的积.

推论 2　正方体的体积等于它的棱长的立方.

例　长方体中相交于一个顶点的三个面的面积各是 $2m^2$、$3\ m^2$ 和 $6\ m^2$，求它的体积.

解：设这个长方体的长、宽、高是 a m、b m、c m，那么 $ab=2$，$ac=3$，$bc=6$.

$$\therefore\quad a^2b^2c^2=2\times3\times6=36;$$

$$\therefore\quad abc=\pm6.\ \text{取正值},$$

$V_{长方体}=abc=6(m^3)$.

这个长方体的体积是 $6m^3$.

公理 6　夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行

于这两个平面的任何平面所截得的两个截面的面积都相等，那么这两个几何体的体积相等.

图 2-45 表示，夹在平行平面 α、β 间的两个形状不同的几何体，如果它们被平行于平面 α、β 的任意平面所截成的截面 P 和 Q 的面积总相等，那么，它们的体积相等.

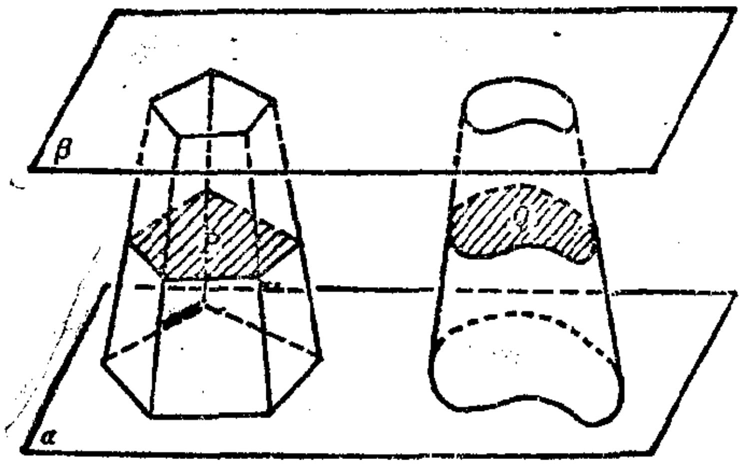


图 2-45

例如，取一摞书或一摞纸张，将它推动变形如图 2-46，显然高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，当然，这摞书或纸张的体积与原来相等(图 2-46).

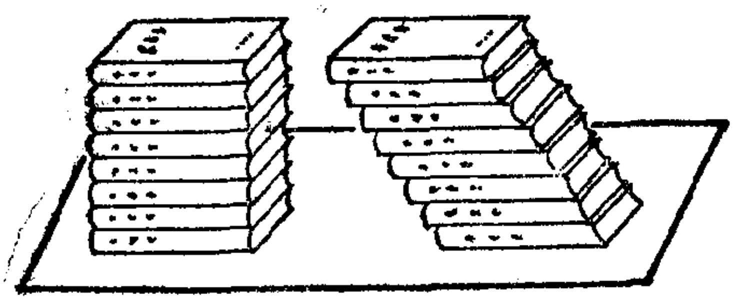
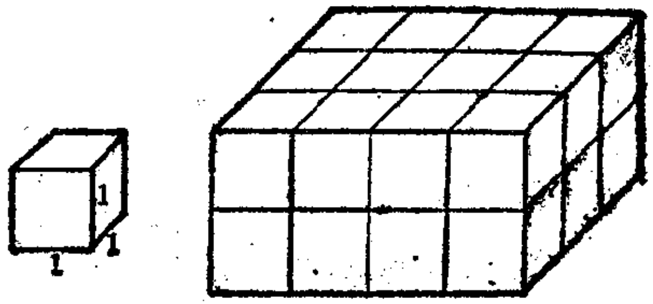


图 2-46

我国古代数学家祖暅，早在公元五世纪，就在实践的基础上，总结出这个公理，并首先使用这个公理证明了球的体积公式，因而我们把它叫做祖暅原理. 在外国，意大利数学家卡发雷利于十七世纪才提出这个原理.

练　习

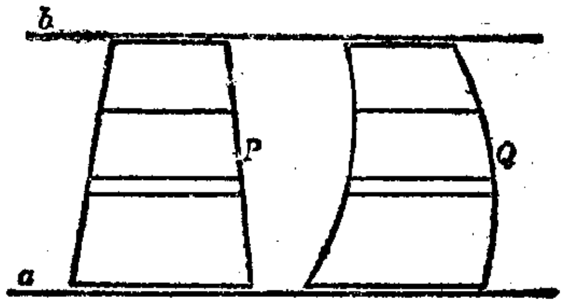
1. 用棱长为 1 的正方体的体积作为体积单位，图中长方体的体积数值等于 24．假如将体积单位改用棱长为 2 的正方体的体积，这个长方体的体积变为多少？为什么？



(第 1 题)

2. 两个正方体的体积的比是 1:2，求它们的棱长的比．

3. 把夹在两条平行线间的两个平面图形的面积相等的条件，用祖暅原理的形式叙述出来，并根据矩形面积公式，求平行四边形的面积公式．



(第 3 题)

2.12　棱柱、圆柱的体积

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的任意棱柱和圆柱，取一个与它们底面积相等、高也相等的长方体，把它们的下底放在同一个平面 α 上．因为它们的上底和下底平行，并且高都相等，所以它们的上底都在和平面 α 平行的同一平面内(图 2-47)．

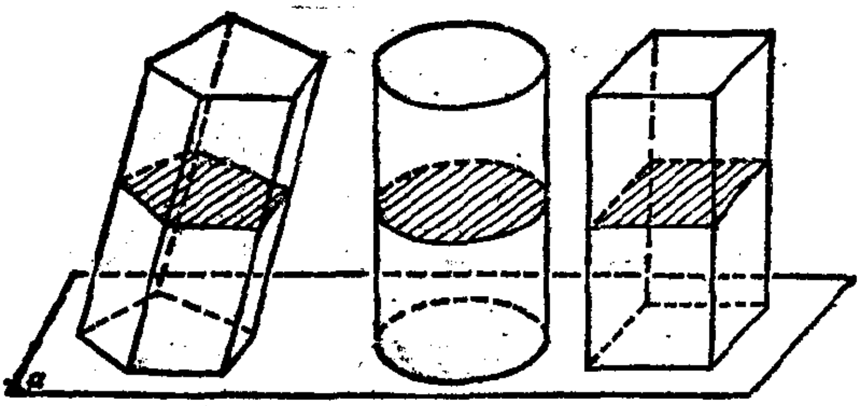


图 2-47

用和平面 α 平行的任意平面去截它们时，所得的截面都和它们的底面分别全等，因而这些截面的面积都等于 S. 根据祖暅原理，它们的体积相等. 由于长方体的体积等于底面积乘以高，因此得：

定理 **如果柱体（棱柱、圆柱）的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是**

$$V_{柱体}=Sh.$$

推论 **圆柱的底面半径是 r，高是 h 时，它的体积是**

$$V_{圆柱}=\pi r^2 h.$$

例 1 三棱柱的底面是 $\triangle ABC$，$AB=13$ cm、$BC=5$ cm、$CA=12$ cm，侧棱 AA' 的长是 20 cm，侧棱和底面所成的角是60°，求这个三棱柱的体积（图 2-48）.

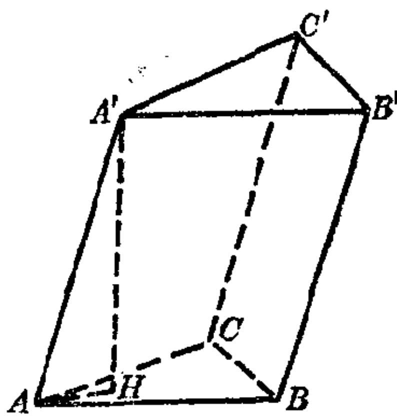


图 2-48

解：从 A' 作 $A'H$ 垂直于底面，连结 AH，得 $\angle A'AH=60°$.

∴ 在 $Rt\triangle A'AH$ 中，

$$A'H=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3},$$

$A'H$ 就是三棱柱的高.

∵ $BC^2+CA^2=AB^2$,

∴ $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形，

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times5\times12=30,$$

所以，

$$V_{棱柱}=30\times10\sqrt{3}=300\sqrt{3}\ (\text{cm}^3).$$

这个三棱柱的体积是 $300\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

例 2 有一堆六角螺帽(图 2-49)，共250 个，它的棱长是12mm，厚度是 10 mm，内孔直径是 10 mm，这堆螺帽共重多少 kg (钢的比重是 7.8 g/cm³)?

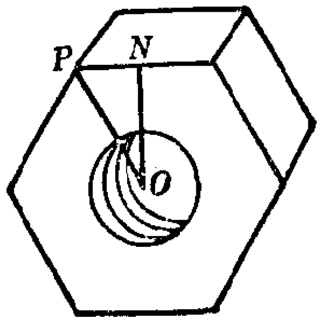


图 2-49

解：六角螺帽的体积，可以看作是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差.

$$ON=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3},$$

$$V_{正六棱柱}=\left(\frac{1}{2}\times12\times6\sqrt{3}\right)\times6\times10$$

$$\approx3.74\times10^3\,(\text{mm}^3).$$

$$V_{圆柱}=3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times10\approx0.785\times10^3\,(\text{mm}^3).$$

所以螺帽的体积

$$V=3.74\times10^3-0.785\times10^3$$
$$\approx2.96\times10^3(\text{mm}^3).$$
$2.96\times10^3\ \text{mm}^3=2.96\ \text{cm}^3$.

需要钢材总重量是

$$W=2.96\times7.8\times250\approx5.8\times10^3(\text{g}).$$
$$5.8\times10^3\ \text{g}=5.8\ \text{kg}.$$

所以 250个六角螺帽约重 5.8 kg.

练 习

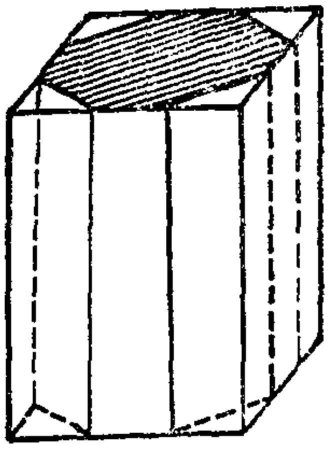
1. 圆柱的底面不变，要它的体积扩大为原来的 n 倍，那么它的高应当为原来的多少倍？
2. 圆柱的高不变，要它的体积为原来的 n 倍，那么它底面的半径应扩大为原来的多少倍？
3. 正方体的侧面积不变，把它变为等高圆柱时，体积增大为原来的多少倍？

习 题 十 四

1. 已知正方体的对角线长是 $4\sqrt{3}$ cm，求它的体积。
2. 计划修建一条水渠，渠道长 1.5 km，渠道横断面梯形两底分别是 1.8 m、0.8 m，高是 0.6 m．如果每人一天挖土 2 m^3，完成这条渠道需要多少个工？
3. 用一个底面直径是 28 cm，高是 33 cm 的圆柱形水桶量水配农药，使加入药粉的重量是水重的 2%，求一桶水应加入多少克药粉？
4. 我国万吨水压机上，有四根圆筒形钢柱，高 18 m，内径

0.4 m，外径 1 m，求这四根钢柱的重量（钢的比重是 $7.8 g/cm^3$）.

5. 将正四棱柱底面的边三等分，过三等分点截去它的四个棱角，得到一个八棱柱，这个八棱柱的体积是原来的几分之几？



（第 5 题）

6. 一个圆柱的高是 h，它的侧面展开图中，母线与对角线的夹角是 60°，求它的体积.

7. 一根圆木料，长 3 米，直径 0.8 米，距圆木的轴 0.2 米且平行于轴锯去一片，求剩余木料为多少立方米（精确到 0.1 米^3）.

8. 一根圆木料的底面直径是 30 cm，长是 6.0 m，把这根圆木料锯成怎样的长方体，可以得到体积最大的方木料？计算所得到的方木料的重量（木料的比重是 $0.90 g/cm^3$）.

2.13 棱锥、圆锥的体积

为求锥体体积，先证明一个预备定理.

定理 等底面积等高的两个锥体（棱锥或圆锥）的体积相等.

已知：任意两个锥体，它们的底面积都是 S、高都是 h.

求证：这两个锥体的体积相等.

证明： 如图 2-50，把两个锥体放在同一平面 α 上，这时

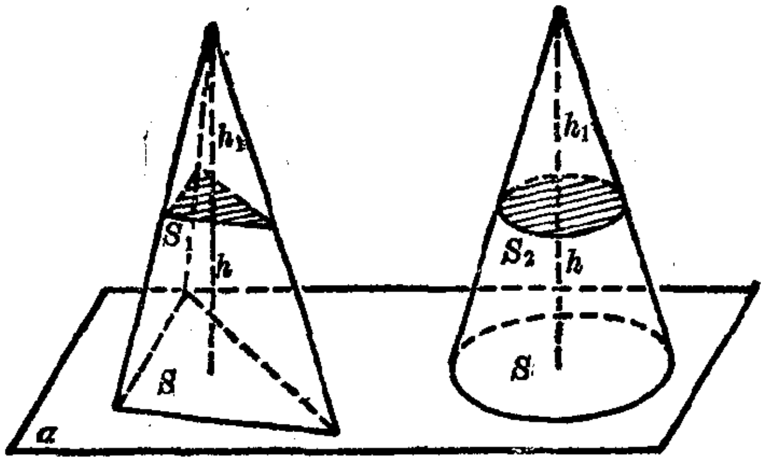


图 2-50

它们的顶点都在和平面 α 平行的同一个平面上．用平行于平面 α 的任意平面去截它们，截面分别与底面相似．设截面和顶点的距离是 h_1，截面面积分别是 S_1、S_2，那么

$$\frac{S_1}{S}=\frac{h_1^2}{h^2},\quad \frac{S_2}{S}=\frac{h_1^2}{h^2},$$

$$\frac{S_1}{S}=\frac{S_2}{S},\quad S_1=S_2.$$

根据祖暅原理，这两个锥体的体积相等．

定理 **如果三棱锥的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是**

$$\boxed{V_{三棱锥}=\frac{1}{3}Sh.}$$

已知：三棱锥 1($A'-ABC$)的底面积是 S，高是 h．

求证：$V_{三棱锥}=\frac{1}{3}Sh.$

证明：把三棱锥 1 补成一个三棱柱，然后再把这个三棱柱分割成三个三棱锥，就是三棱锥 1 和另两个三棱锥 2、3（图 2-51）．

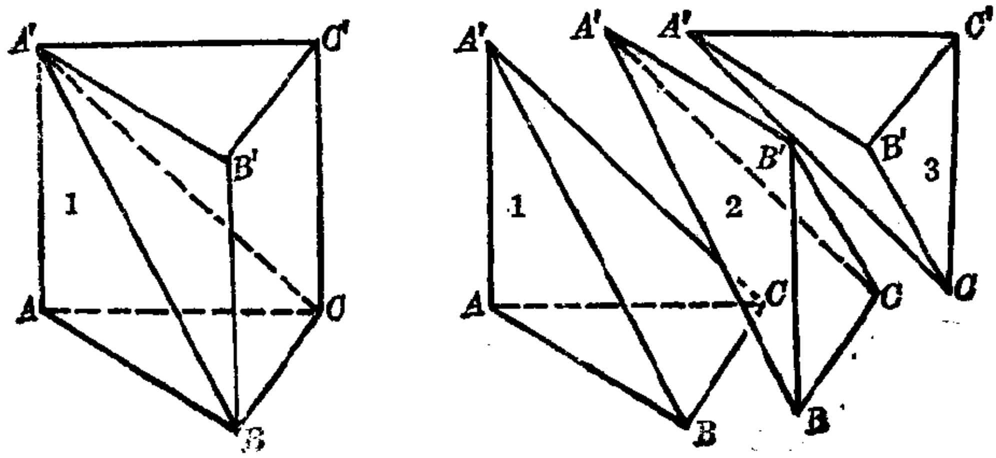


图 2-51

三棱锥 1、2 有等底$\triangle ABA'$、$\triangle B'A'B$和等高(因顶点C相同)；三棱锥 2、3 有等底$\triangle BCB'$、$\triangle C'B'C$和等高(因顶点A'相同)。根据前定理，

$$V_1=V_2=V_3=\frac{1}{3}V_{三棱柱},$$

$$\because\quad V_{三棱柱}=Sh,$$

$$\therefore\quad V_{三棱锥}=\frac{1}{3}Sh.$$

因为任何一个锥体的体积等于和它等底面积等高的一个三棱锥的体积，所以我们得到下面的定理:

定理　如果一个锥体(棱锥、圆锥)的底面积是S，高是h，那么它的体积是

$$\boxed{V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.}$$

推论　如果圆锥的底面半径是 r，高是 h，那么它的体积是

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

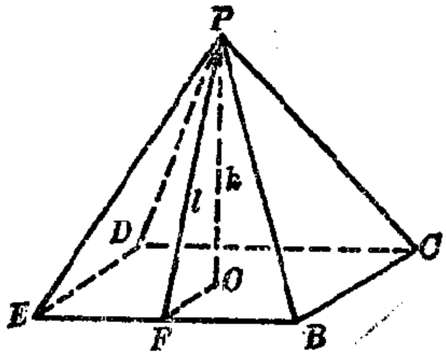


图 2-52

例 1 正四棱锥的底面积 $S=12$ 平方单位，侧面积 $A=24$ 平方单位，求它的体积.

解：设正四棱锥 P-BD 的高是 h，斜高是 l（图 2-52）.

由 $BE=\sqrt{S}$，得 $\frac{A}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{S}\cdot l$.

则 $l=\frac{A}{4}\times\frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{A\sqrt{S}}{2S}$.

在 $Rt\triangle PFO$ 中，$OF=\frac{\sqrt{S}}{2}$，

$$\therefore\quad h=\sqrt{\left(\frac{A\sqrt{S}}{2S}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{S}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{S(A^2-S^2)}}{2S}.$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{\sqrt{S(A^2-S^2)}}{2S}=\frac{1}{6}\sqrt{S(A^2-S^2)}.$$

因为 $S=12$ 平方单位，$A=24$ 平方单位，所以

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{12\times(24^2-12^2)}=12(立方单位)$$

这个正四棱锥的体积是 12 立方单位.

例 2 一块正方形薄铁板，边长 20 cm，以它的一个顶点为圆心画一个最大的扇形，用这块扇形铁板围成一个圆锥筒（图 2-53），求它的容积（精确到 1 cm^3）.

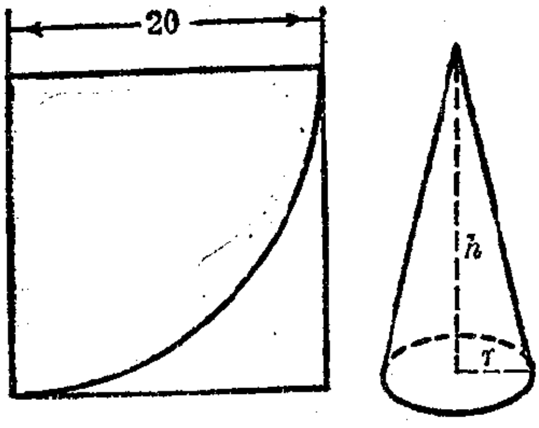


图 2-53

解：如图 2-53，按题意，最大扇形弧长是 $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 40$. 设圆锥筒底半径是 r，因此，所作的圆锥筒的底的周长 $2\pi r=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 40$.

$$\therefore\quad r=5(\text{cm}).$$

因为圆锥母线长等于 20 cm，所以圆锥的高

$$h=\sqrt{20^2-5^2}=5\sqrt{15}(\text{cm})。$$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot 5\sqrt{15}$$

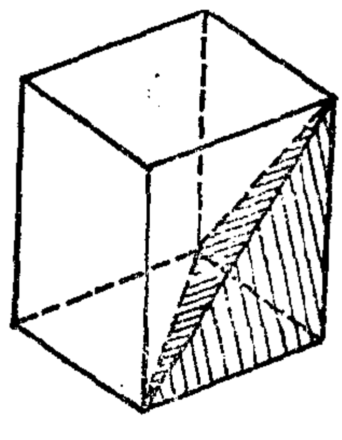
$$\approx 5.07\times 10^2(\text{cm}^3).$$

所求圆锥筒的容积约为 507 cm^3.

练　习

1. 圆锥的底面直径变为原来 3 倍，并使它的体积不变，那么它的高应是原来几分之一？

2. 如图，将长方体沿相邻三个面的对角线截去一个三棱锥，这个三棱锥的体积是长方体体积的几分之几？



(第 2 题)

3. 已知圆锥的底面周长是 c，高是 h. 证明这个圆锥的体积 V 可以近似地表示为 $V\approx\left(\frac{c}{6}\right)^2 h$.

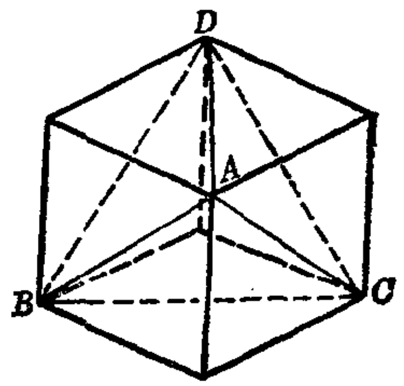
习题十五

1. 在下列情形下，正棱锥的体积有什么变化：

   (1) 高和底面边长都增为原来的 n 倍；

   (2) 高增为原来的 n 倍，底面边长缩为原来的 $\frac{1}{n}$。

2. 一个正方体，用过顶点的平面截去四角，截成一个正三棱锥如图．这个正三棱锥的体积是原来正方体体积的几分之几？

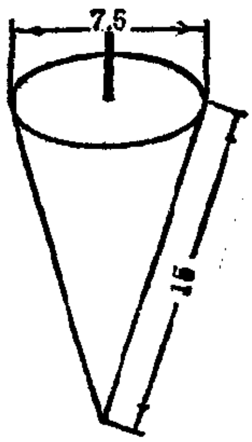


(第 2 题)

3. 已知正三棱锥的底面边长是 a，侧棱长是 b，求它的体积。

4. 已知正六棱锥的底面边长是 a，斜高是 b，求它的体积。

5. 一个铜制的圆锥体，它的尺寸如图（单位 cm），求它的重量（铜的比重是 8.9 g/cm^3）。



(第 5 题)

6. 圆锥的底面半径是 10 cm，母线和底面成 60° 角，求它的体积。

7. 一圆锥的侧面展开图的半径是 9 cm，圆心角是 240°，求这圆锥的体积（精确到 1 cm^3）。

8. 圆锥的体积是 22.4cm^3，轴和母线所成的角是 $48°15'$，求它的高（精确到 0.01 cm）。

2.14 棱台、圆台的体积

定理 如果台体（棱台、圆台）的上、下底的面积分别是 S'、s，高是 h，那么它的体积是

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h\left(S+\sqrt{SS'}+S'\right).$$

已知：台体的上、下底的面积分别是 S'、S，高是 h.

求证：$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$.

证明：如图 2-54，设截得台体时去掉的锥体的高是 x，去掉的锥体和截得台体的锥体的体积分别是 V'、V.

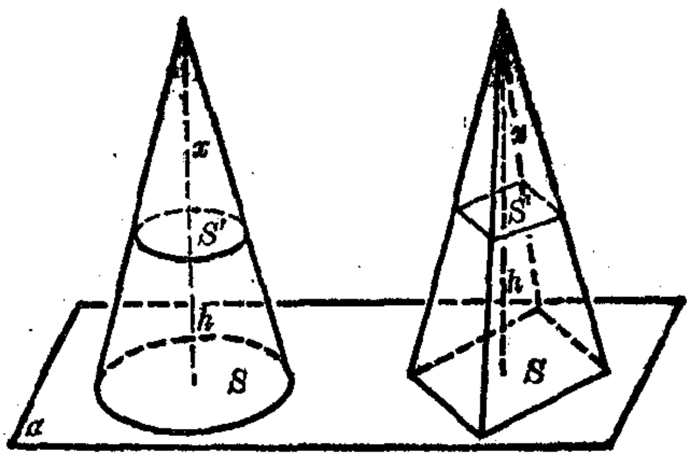


图 2-54

$$V'=\frac{1}{3}S'x,\ V=\frac{1}{3}S(h+x).$$

$$\begin{aligned}V_{台体}&=V-V'\\&=\frac{1}{3}S(h+x)-\frac{1}{3}S'x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}[Sh+(S-S')x].$$

因为台体上、下底相似，所以

$$\frac{S'}{S}=\frac{x^2}{(h+x)^2},\quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{x}{h+x},$$

$$x=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}h.$$

代入上式，得

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right].$$

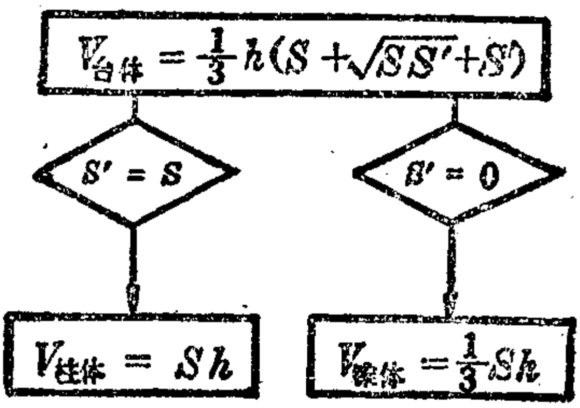
$$\therefore \qquad V_{台体}=\frac{1}{3}h[S+\sqrt{S'}(\sqrt{S}+\sqrt{S'})]$$

$$=\frac{1}{3}h[S+\sqrt{SS'}+S'].$$

推论 如果圆台的上、下底半径分别是 r'、r，高是 h，那么它的体积是

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2).$$

在台体体积公式中，如果设 $S'=S$，就得到柱体体积公式 $V_{柱体}=Sh$；如果设 $S'=0$，就得到锥体体积公式 $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$. 因此，柱体、锥体、台体体积公式的关系如下图：



例 一个圆台形水桶，大底直径是 30 cm，小底直径是 24 cm，母线长 36 cm，这个水桶能容水重多少公斤？

解：如图 2-55，∵ $h=\sqrt{36^2-\left(\frac{30-24}{2}\right)^2}\approx 35.9$，

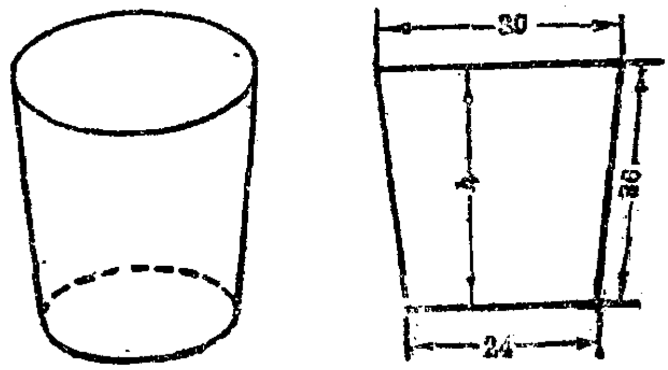


图 2-55

$$r=\frac{30}{2}=15,\quad r'=\frac{24}{2}=12,$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

$$\approx\frac{1}{3}\times 3.14\times 35.9\times(15^2+15\times 12+12^2)$$

$$\approx 2.1\times 10^4(\mathrm{cm}^3).$$

$2.1\times 10^4\mathrm{cm}^3=21$(升)。

水重 $W=21$ 公斤。

这水桶能容水重约 21 公斤。

练 习

1. 圆囤呈圆台形，中截面面积是 S_0，高为 h，说明这个圆囤的体积 V 可以近似地表示为 $V\approx S_0h$。

2. 自动加煤机的进料斗是正四棱台形，它的上口边长 3 m，下口边长 2 m，高 1.5 m，求进料斗的容积。

*2.15 拟柱体及其体积

我们经常遇到堆放整齐的沙石堆、粪堆体积的计算问题。这些物体的形状一般不是棱台.

所有顶点分别在两个平行的平面内的多面体叫做**拟柱体**. 在两个平行平面内的面叫做**底面**, 其他各面叫做**侧面**, 两底面之间的距离叫做**高**, 通过高的中点且平行于底面的截面叫做拟柱体的**中截面**(图 2-56).

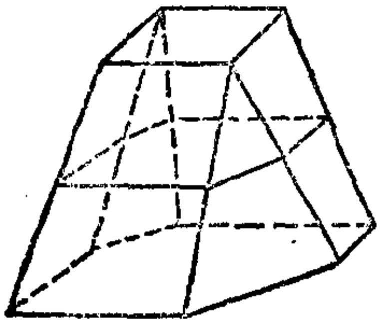
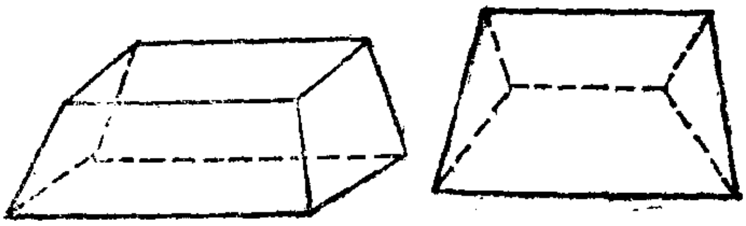


图 2-56



甲　　乙

图 2-57

显然, 拟柱体的侧面是三角形、平行四边形或梯形.

两个底面都是矩形, 并且对应边平行的拟柱体叫做**长方台**(图 2-57 甲); 一个底面是梯形或平行四边形, 另一个底面变成平行于这个底面的一条棱, 这样的拟柱体叫做**楔体**(图 2-57 乙).

除长方台、楔体外, 棱柱、棱锥、棱台也都是拟柱体的特殊情况.

如果拟柱体的上、下底面积是 S'、S, 中截面面积是 S_0, 高是 h, 那么它的体积是

$$V_{\text{拟柱体}}=\frac{1}{6}h(S'+4S_0+S).$$

公式证明从略.

例 工地旁有一石堆（图 2-58），它的上底面和下底面是互相平行的两个矩形，各侧面都是梯形．上底面的边长是 5.2 m 和 3.4 m，下底面的边长是 7.3 m 和 4.2m，上下底面的距离是 2.5 m．求这一堆石重多少吨（一方石重 1.6 吨）．

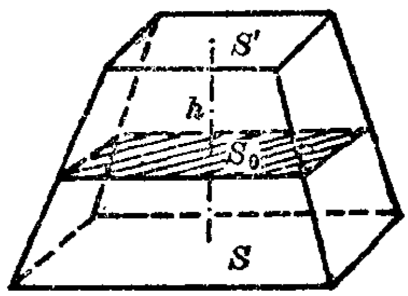


图 2-58

解：因为$\frac{5.2}{7.3}\neq\frac{3.4}{4.2}$，所以各侧棱延长之后不能交于一点．因此这个石堆的形状不是棱台，而是拟柱体．

依题意得

$$S_0=\frac{1}{2}(5.2+7.3)\times\frac{1}{2}(3.4+4.2)$$

$$\approx 23.8(m^2),$$

$$V=\frac{1}{6}\times 2.5\times(7.3\times 4.2+4\times 23.8+5.2\times 3.4)$$

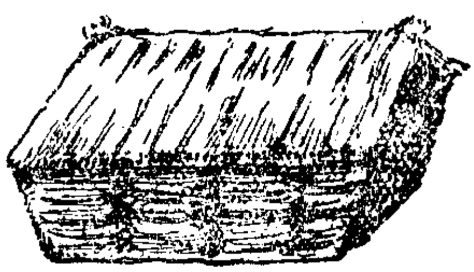
$$\approx 59.8(m^3),$$

石重 $59.8\times 1.6\approx 96$（吨）．

这石堆约重 96 吨．

练　习

一草垛下部是长方台形，上部是以长方台的上底为底的楔形．已知长方台上底面的边长约为 8.4 m 和 4.2 m，下底面边长约为 7.6 m 和 3.0m，高是 2.2m，楔体的上面的棱长约为



5.8m，高为 1.5m．求这垛草重约为多少斤(每一立方米的草重约 300 斤)．

习题十六

1. 已知正六棱台的上、下底边长分别是 a、b，高是 h，求它的体积。
2. 两底边长分别是 30 cm、20 cm 的正三棱台，它的侧面积等于两底面积的和，求这正三棱台的体积．
3. 已知棱台的体积是 76 cm^3，高是 6 cm，一个底面积是 18 cm^2，求这个棱台的另一个底面的面积．
4. 台体的上下底面积的比是 1:9，用中截面把它分成两个台体，求这两个台体的体积比。
5. 证明圆囤的体积可以近似地表示为 $V\approx\frac{1}{12}c^2h$ (c 是中截面周长，h 是高)。
6. 圆台的高是 8 cm，母线长 10 cm，下底面的半径是上底面半径的 3 倍，求这圆台的体积．
7. 有一个草垛，上部是圆锥形，下部是圆台形．圆锥的高是 0.7 米，底面周长是 5.1 米；圆台高 1.5 米，下底周长 4 米．如果每立方米草重 300 斤，求这堆草的重量．
8. 圆台的体积是 21000 πcm^3，它的高是 30 cm，并且下底面积是上底面积的 16 倍，求它的上底半径．
9. 要筑一土堤，上下底面都是矩形，对应边互相平行，高 2.3 米，下底长 58 米、宽 4.6 米，上底长 50 米、宽 3.4 米，求这土堤需土多少立方米？

2.16 球的体积

定理 如果球的半径是 R，那么它的体积是

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

已知：球的半径是 R.

求证：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

证明：如图 2-59，考虑平面 α 上半径为 R 的半球和一个底面半径和高都是 R 的圆柱. 从圆柱中挖去一个圆锥，它的底面和圆柱上底相同，高也是 R. 我们来证明半球的体积等于这个圆柱挖去圆锥后剩余部分的体积. 根据祖暅原理，我们只要证明平行于平面 α 的任意平面截半球和圆柱剩余部分的截面面积相等就可以了.

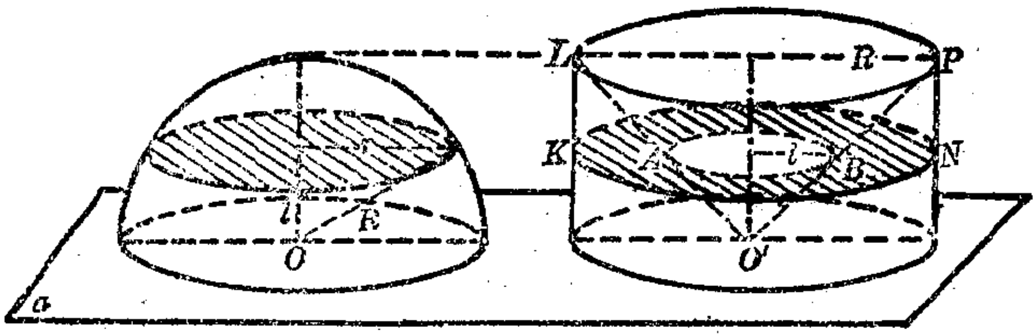


图 2-59

设截面与平面 α 的距离是 l. 这时，截半球所得的圆的半径 $r=\sqrt{R^2-l^2}$，因而圆的面积是 $\pi r^2=\pi(R^2-l^2)$. 截圆柱剩余部分得到圆环，它的外半径是 R，内半径是 l（为什么？），因而圆环面积是 $\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$. 因为半球与圆柱剩余部分夹在两平行平面之间，被任一平行平面所截的两截面面积都相等，所以它们的体积相等. 而圆柱剩余部分的体积

是

$$\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

这就得到

$$\frac{1}{2}V_{球}=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

因此 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$

例 一个空心钢球重 142 g，测得外径是 5.0 cm. 求它的内径(钢的比重是7.9 g/cm³).

解: 设空心钢球的内径是 $2x$cm，则可得方程

$$7.9\times\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi x^3\right]=142,$$

$$x^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{142\times 3}{7.9\times 4\pi}\approx 11.3,$$

$\therefore\quad x\approx 2.24,$

$2x\approx 4.5(\text{cm}).$

空心钢球的内径约是 4.5 cm.

练　习

1. 火星的直径约是地球的一半，它和地球的体积的比约是多少？

2. 木星的面积约是地球的 120 倍，它的体积约是地球体积的多少倍？

2.17 球缺的体积

一个球被平面截下的一部分叫做球缺. 圆截面叫做球缺

的底面，垂直于截面的直径被截下的线段长叫做球缺的高.

显然，球缺也可以看做是球冠和截面所围成的几何体(图 2-60).

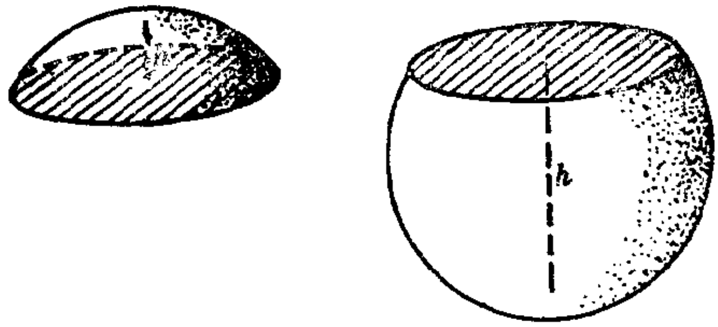


图 2-60

球缺的体积公式，可仿球的体积求法推出. 设球的半径是 R，球缺的高是 h. 利用前节的图 2-59，因为已证明了任意截面面积都分别相等，所以根据祖暅原理，球缺的体积

$$V_{球缺}=V_{圆柱\ LKNP}-V_{圆台\ LABP}$$

$$=\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h[R^2+R(R-h)+(R-h)^2]$$

$$=\pi Rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3$$

$$=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

由此得:

定理　如果球的半径是 R，球缺的高是 h，那么球缺的体积是

$$\boxed{V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).}$$

这个公式对于求半球、小于、大于半球的球缺、整个球的体积都适用，例如用 R 代 h，就得到半球的体积 $\frac{2}{3}\pi R^3$.

例 1 一个球缺的高是球直径的$\frac{1}{10}$，这个球缺的体积是球体积的几分之几？

解: 设R为球半径，依题意球缺的高 $h=\frac{2R}{10}=\frac{R}{5}$.

$$V_{球缺}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{R}{5}\right)^2\cdot\left(R-\frac{R}{15}\right)$$

$$=\frac{14}{375}\pi R^3.$$

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$\therefore\quad \frac{V_{球缺}}{V_{球}}=\frac{\frac{14}{375}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{7}{250}.$$

球缺的体积是球体积的$\frac{7}{250}$.

例 2 已知球缺底面半径是 r，高是 h，求证球缺的体积 $V_{球缺}=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$.

证明: 如图 2-61，设截成球缺的球的半径是R，由直角三角形 OAH,

$$r^2=R^2-(R-h)^2=2hR-h^2,$$

$$R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}.$$

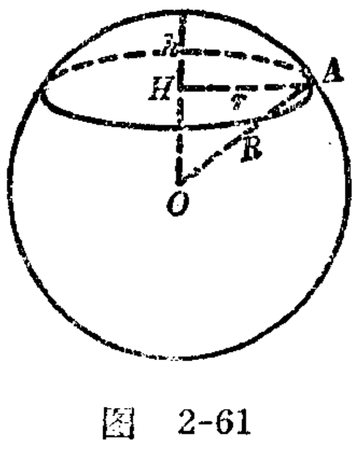


图 2-61

代入球缺体积公式，得

$$V_{球缺}=\pi h^2\left(\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\pi h\,(3r^2+h^2).$$

练　习

1. 球缺的体积是$\frac{\pi}{3}\mathrm{cm}^3$，它的高是$\frac{1}{2}$cm，求截得球缺的球的半径.

2. 球缺的底面半径是球的半径的$\frac{1}{2}$，体积是球的几分之几？

习题十七

1. (1) 把直径是 20cm 的一个铅球熔化后，能做成多少个直径是 2cm 的小球(不计损失)？

   (2) 把直径分别等于 6cm、8cm 和 10cm 的三个锡球熔成一个大锡球，求这个大锡球的直径.

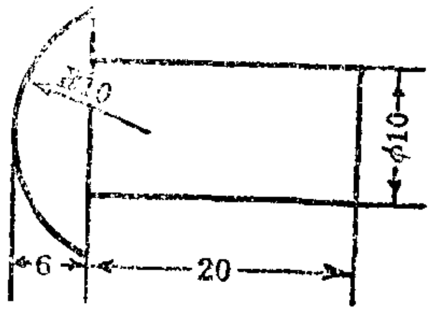
2. 造纸厂的蒸球直径 $D\approx3.66$m，计算它的容积.

3. 铜球由于加热膨胀而使半径增加千分之一，求它的体积增加几分之几(精确到千分之一).

4. 三个球的半径之比是 1:2:3，求证：最大球的体积等于其他两个球的体积和的 3 倍.

5. 试比较球冠、球缺的异同，指出相互之间的关系，并且利用破的乒乓球做出它们的模型.

6. 钢铆钉钉头呈球缺形，钉身呈圆柱形，尺寸如图（单位：mm）。已知钢的比重是 $7.8 g/cm^3$，求铆钉的重量（精确到 1g）。



（第 6 题）

7. 在直径是 50mm 的球内，以球的直径为轴钻一个直径等于 30mm 的圆柱形的孔，求这球剩余部分的体积。

8. 直径 $D \approx 10$cm 的木球浮在水面上球缺的高是 $h \approx 2.0$cm，求这种木料的比重。

小　结

本章学习的主要内容：

一、几种多面体和旋转体的概念、性质、直观图画法及面积计算公式，要注意这些公式的联系与特点以及它们的应用。侧面积公式如下表：

名称		侧面积公式
多面体	直棱柱	$S=ch$
	正棱锥	$S=\frac{1}{2}ch'$
	正棱台	$S=\frac{1}{2}(c+c')h'$
旋转体	圆柱	$S=cl=2\pi rl$
	圆锥	$S=\frac{1}{2}cl=\pi rl$
	圆台	$S=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l$
	球面	$S=4\pi R^2$
	球冠	$S=2\pi Rh=\pi(r^2+h^2)$

二、在体积概念和体积公理的基础上，推导出几种多面体、旋转体的体积公式．要注意这些公式的联系与特点，以及它们的应用．体积公式如下表：

名	称	体积公式
多面体	棱柱	$V=Sh$
	棱锥	$V=\frac{1}{3}Sh$
	棱台	$V=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$
	拟柱体	$V=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S')$
旋转体	圆柱	$V=\pi r^2h$
	圆锥	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
	圆台	$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$
		$=\frac{1}{6}\pi h(r^2+4r_0^2+r'^2)$
	球体	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
	球缺	$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$
		$=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$

复习题二

1. 正四棱柱底面的对角线长是8cm，侧面的对角线长是7cm，求这正四棱柱的对角线长．

2. 一个棱锥的侧棱都相等，底面多边形的边长也相等，这个

棱锥是不是正棱锥？为什么？

3. 有一个正四棱台，它的一个侧面的上底长 2cm，下底长 4cm，腰长 2cm，求这个棱台的高和对角线长，并且画出它的直观图.

4. 一个圆锥的侧面母线长和高的比是 5:4，中截面的半径是 4cm. 画出这个圆锥的直观图.

5. 圆台的高是 4cm，在上下底面$\odot O$和$\odot O'$的半径分别是 OA 和 $O'A'$，它们互相垂直. $OA=3$cm，$O'A'=6$cm. 求 (1) 线段 AA' 的长，(2) 这线段和下底面所成的角.

6. 甲乙两地在北纬 60° 圈上，它们之间的纬度圈弧长等于 $\frac{\pi}{2}R$（这里 R 是地球的半径），求这两地间的球面距离.

7. 长方体的各棱长的比是 3:8:7，它的全面积是 50.5cm^2，求它的各棱长.

8. 正三棱锥的底面的边长是a，侧面与底面所成的角是60°，求它的全面积.

9. 一个拱形水坝的迎水面是圆柱面一部分，半径 76 米，所对圆心角是 120°，坝面高 52 米. 拦蓄洪水时，水面离坝顶 17 米，这时洪水对坝面的平均压强 $P=17.5$ 吨/米^2. 求坝面承受的总压力.

10. 已知圆锥底面半径是 r，母线长是 $2r$，用平行于底面的平面把这个圆锥表面截成面积相等的两部分，求截下的圆锥的母线长.

11. 圆台的上、下底面半径分别是 r'、r，母线和底面所成角是 60°，求这个圆台的侧面积.

12. 要使电视卫星的电波，能直射到地球表面积的$\frac{1}{3}$，卫星要发射到离地面多高？

13. 一个球冠形凹面镜，底的直径是180mm，高是12mm．求截得球冠的球的半径和凹面镜的面积．

14. 测定某些材料的硬度，可用标准钢球(直径10mm)放在材料上，加上一定的压力Pkg，将材料表面压成球冠形凹痕，设凹痕的面积是$S\text{mm}^2$，这时材料的硬度是P/S kg/mm^2．如果所加压力是3.0×10^2kg，凹痕直径是4.1mm，计算这材料的硬度．

15. 正方体的棱长增加一倍，它的体积是否也增加一倍？

16. 正方体的棱长是a，过交于一点的三条棱的中点，用平面将这个正方体截去一角．求正方体剩余部分的体积．

17. 将铁皮剪成半径是12cm，圆心角是134°的扇形，用它卷成一个圆锥筒，求筒的容积(精确到1cm^3)．

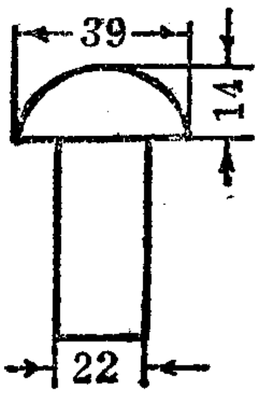
18. 把面积为2512cm^2的铝板压制成圆柱形铝桶，如果铝桶面积和铝板面积相等，高是10cm，求这种铝桶的容积(精确到100cm^3)．

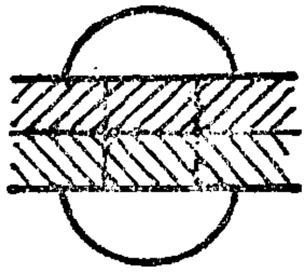
19. 有甲乙两个容器，甲容器是圆柱形，高是2分米，底半径是1分米；乙容器是倒圆锥形，高是2分米，底半径是$2\sqrt{3}$分米．如果把甲容器盛满水，然后将甲容器内的水倒入乙容器，使得两容器内水面一样高，这时水面高度是多少分米？

20. 已知圆台的体积等于以它的下底面为底面并且与它等高的圆柱的体积的一半．求这个圆台两底面面积的比．

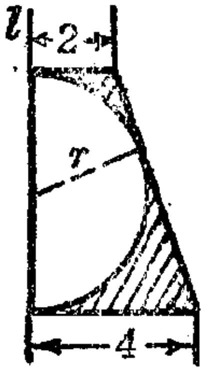
21. 球缺的体积是$\frac{8\pi}{3}\text{cm}^3$，底面面积是$5\pi\text{cm}^2$，求球的半径。

22. 长江大桥的钢梁结构是用铆钉铆合的（如图，单位：mm）。铆钉头是球缺形，钉身是圆柱形，铆钉插入两块钢板铆合后，两侧钉头大小相等。已知每块钢板厚12mm，求钉身长度。





（第22题）



（第23题）

23. 求图中阴影部分绕轴 l 旋转所成旋转体的表面积和体积。

24. 一个圆锥侧面的母线和底面直径相等（等边圆锥），内有一内切球，已知圆锥底面直径为$2r$，求球的体积。

※第三章 多面角和正多面体

一 多面角及其性质

3.1 多面角

相邻的两面墙壁和天花板所成的屋角，一些亭子的尖顶，都给我们以多面角的形象.

有公共端点不在同一平面内的几条射线，以及两条相邻射线间的平面部分所组成的图形，叫做**多面角**.

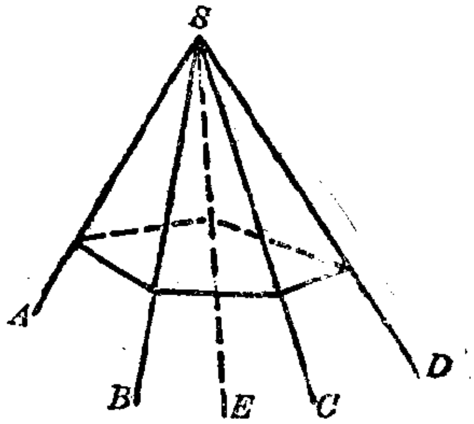


图 3-1

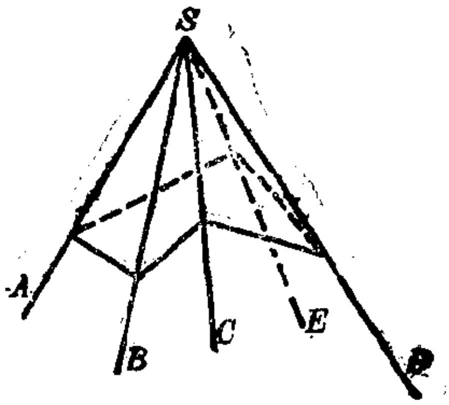


图 3-2

如图 3-1、3-2，都是多面角. 组成多面角的射线 SA、SB、……叫做**多面角的棱**，这些射线的公共端点 S 叫做**多面角的顶点**，相邻两棱间的平面部分叫做**多面角的面**，相邻两棱组成的角 $\angle ASB$、$\angle BSC$、……叫做**多面角的面角**，相邻两个面组成的二面角 $E\text{-}SA\text{-}B$、$A\text{-}SB\text{-}C$、……叫做**多面角的二面角**.

一个多面角的面数等于它的棱数、面角数、二面角数. 多

面角的面数最少是三，有三个面的多面角叫做**三面角**，有四个面的多面角叫做**四面角**，其余类推.

多面角可用表示它的顶点和棱的几个字母表示，如图3-1的多面角记作多面角 $S\text{-}ABCDE$；有时也可用表示顶点的一个字母表示，如多面角 S.

把一个多面角的任一个面伸展成平面，如果所有其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面角叫做**凸多面角**. 如图3-1的多面角是凸多面角，图 3-2 的多面角就不是凸多面角.

我们用一个平面截一个凸多面角的各面和棱，得到的是一个凸多边形.

本书只研究凸多面角，以后所说的多面角，指的都是凸多面角.

我们常见的三面角如屋角、箱角等，它们的每一个面角都是直角. 三个面角都是直角的三面角叫做**直三面角**.

例 求证：直三面角的各个二面角都是直二面角.

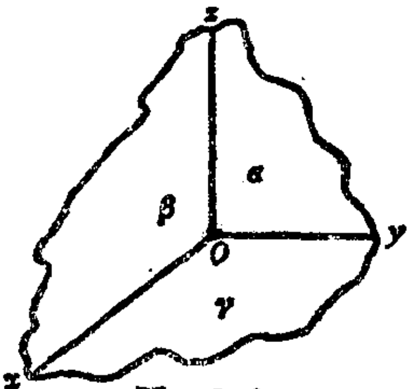


图 3-3

已知：直三面角 $O\text{-}xyz$（图3-3）.

求证：二面角 $\beta\text{-}Ox\text{-}\gamma$、$\gamma\text{-}Oy\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}Oz\text{-}\beta$ 都是直二面角.

证明：∵ $O\text{-}xyz$ 是直三面角，

∴ $\angle xOy=\angle yOz=\angle zOx=90°$.

$Oz\perp Ox$，$Oy\perp Ox$，

∴ $\angle yOz$ 是二面角 $\beta\text{-}Ox\text{-}\gamma$ 的平面角.

∵ $\angle yOz=90°$，

∴ 二面角 $\beta\text{-}Ox\text{-}\gamma$ 是直二面角.

同理 $\gamma\text{-}Oy\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}Oz\text{-}\beta$ 也是直二面角.

练 习

1. 二面角是不是多面角？多面角是不是棱锥？为什么？
2. 求证：三个二面角都是直二面角的三面角是直三面角.

3.2 多面角的性质和全等

1. 多面角的性质

定理 三面角的任何一个面角小于其他两个面角的和.

已知：三面角 $S\text{-}ABC$(图 3-4).

求证：$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

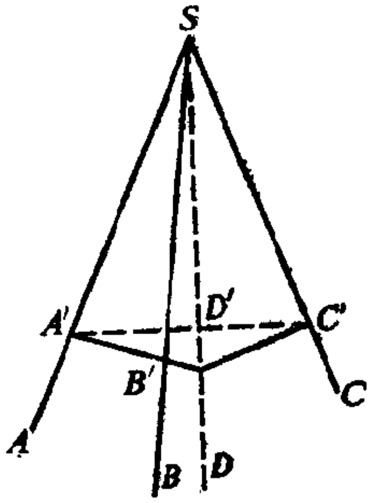


图 3-4

证明：当 $\angle ASC \leqslant \angle ASB$ 时，显然，$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

现在设$\angle ASC > \angle ASB$.

在$\angle ASC$ 内作 SD，使 $\angle ASD = \angle ASB$.

在 SA 上任取一点 A'，在 SB、SD 上分别取 B'、D'，使$SB' = SD'$ 且 A'、B'、D' 三点确定的平面交 SC 于 C'. 那么$\triangle A'SB' \cong \triangle A'SD'$,

∴ $A'B' = A'D'$.

∵ $A'C' > A'D'$,

∴ $A'C' > A'B'$.

在$\triangle A'B'C'$内,

∵ $A'C' - A'B' < B'C'$,

$\therefore\quad A'C'-A'D'<B'C'$,

就是 $\qquad D'C'<B'C'$.

在$\triangle D'SC'$和$\triangle B'SC'$中,

$\because\quad SD'=SB',\ SC'=SC', D'C'<B'C'$,

由余弦定理得 $\qquad \cos D'SC'>\cos B'SC'$,

$\therefore\quad \angle D'SC'<\angle B'SC'$.

因此 $\angle ASD+\angle DSC<\angle ASB+\angle BSC$.

就是 $\angle ASC<\angle ASB+\angle BSC$.

推论 三面角的任何一个面角大于其他两个面角的差.

从上面的定理我们看到,三面角的性质与三角形类似,三面角的二面角与三角形的角对应,面角与边对应. 因此,有些三面角的问题,可归结为三角形的问题来研究.

定理 多面角所有面角的和小于360°.

已知: $S\text{-}ABC\cdots\cdots E$是$n$面角(图3-5).

求证: $\angle ASB+\angle BSC+\cdots+\angle ESA<360°$.

证明: 用平面截这个n面角的各面和棱, 得到n边形$A'B'C'\cdots E'$.

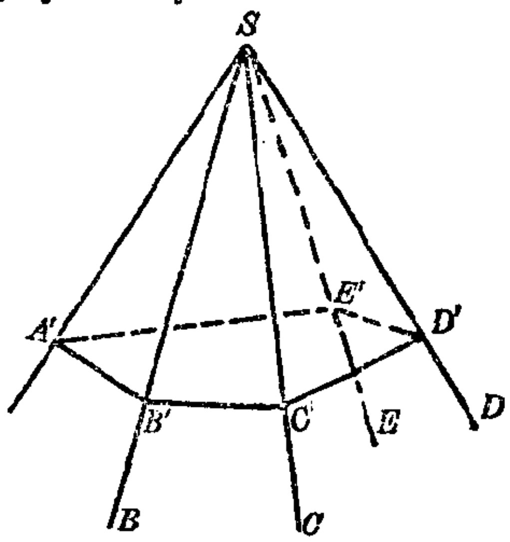


图 3-5

在三面角$A'\text{-}SE'B'$里,

$$\angle SA'E'+\angle SA'B'>\angle E'A'B'.$$

同理得

$$\angle SB'A'+\angle SB'C'>\angle A'B'C',$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\angle SE'D'+\angle SE'A'>\angle D'E'A'.$$

$\therefore\ \angle SA'E'+\angle SA'B'+\cdots+\angle SE'D'+\angle SE'A'$
$>\angle E'A'B'+\angle A'B'C'+\cdots+\angle D'E'A'.$

而 $\angle SA'E'+\angle SA'B'+\cdots+\angle SE'D'+\angle SE'A'$
$=(\angle SA'B'+\angle SB'A')+(\angle SB'C'+\angle SC'B')$
$+\cdots+(\angle SE'A'+\angle SA'E')$
$=(180^\circ-\angle A'SB')+(180^\circ-\angle B'SC')+\cdots$
$+(180^\circ-\angle E'SA')$
$=n\cdot 180^\circ-(\angle A'SB'+\angle B'SC'+\cdots$
$+\angle E'SA').$

又 $\angle E'A'B'+\angle A'B'C'+\cdots+\angle D'E'A'$
$=(n-2)\cdot 180^\circ.$

$\therefore\ n\cdot 180^\circ-(\angle A'SB'+\angle B'SC'+\cdots+\angle E'SA')$
$>(n-2)\cdot 180^\circ,$

$\therefore\ \angle A'SB'+\angle B'SC'+\cdots+\angle E'SA'<360^\circ.$

即 $\angle ASB+\angle BSC+\cdots+\angle ESA<360^\circ.$

2. 多面角的全等

把一个多面角放到另一个多面角上去，如果它们的各部分能够完全重合，那么这两个多面角就叫做**全等的多面角**. 两个全等的多面角的面角、二面角都对应相等.

例如，所有的直三面角都可以重合，因而是全等的.

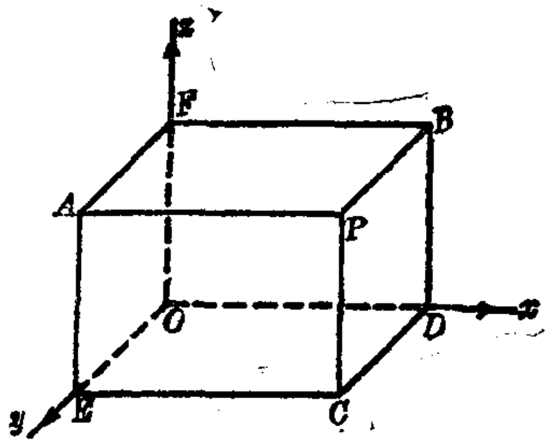
练　习

用下列各组的三个角做面角，能不能构成三面角？为什么？

(1) 40°、70°、120°；　　(2) 100°、80°、150°.

习题十八

1. 如图，P 是直三面角 $O\text{-}xyz$ 内一点，PA、PB、PC 分别是点 P 到三个面的垂线段，求证：



(第1题)

(1) $AP \parallel Ox$，$BP \parallel Oy$，$CP \parallel Oz$；

(2) 平面 $FAPB \parallel$ 平面 $OECD$；

(3) $CP=OF$.

2. 直三面角内有一点，它到各面的距离分别是 7cm、8cm、9cm，求这点到三面角顶点的距离.

3. 直三面角 $O\text{-}xyz$ 内有一点 P，OP 在三面角三个面上的射影长分别是 a、b、c，求证 $OP=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

4. 用硬纸做一个三面角，然后沿它的一条棱把它剪开. 用迭合的方法来看一看，是否任意两个面角的和一定大于第三个面角？

5. 用硬纸做一个多面角，然后沿它的一条棱把它剪开，并且将它平铺在桌面上. 各个面角的和是否一定小于360°？

6. 求证：多面角的任何一个面角小于其他面角的和.

7. 求证：空间四边形每相邻两边所成的四个角的和小于360°.

8. 用下列各组四个角做面角，能不能构成四面角？为什么？

(1) 50°、70°、100°、150°;

(2) 150°、35°、65°、40°.

二 正多面体、多面体变形

3.3 正多面体

有的矿物的结晶体和有的大跨度建筑物屋顶呈正多面体或多面体的形状(图 3-6). 这一节先研究正多面体.

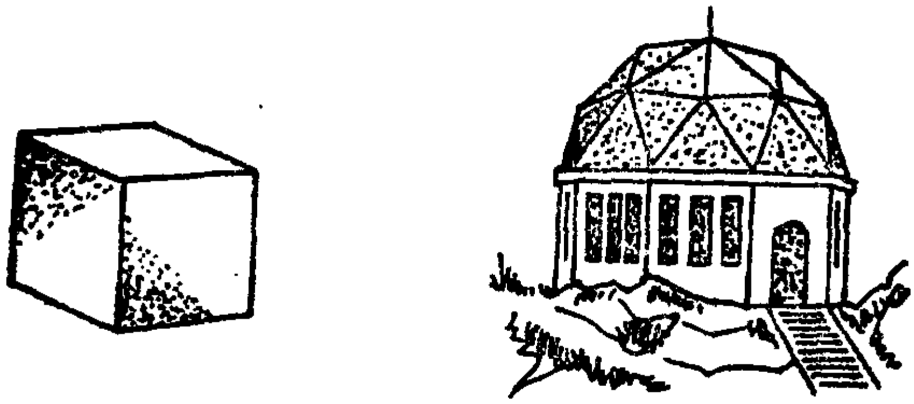


图 3-6

如果多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的多面角，这种多面体叫做**正多面体**. 在正多面体里，所有的棱、所有的面角和所有的二面角都是相等的. 例如，正方体的各个面都是全等的正方形，并且各个多面角都是直三面角，正方体就是一种正多面体.

用正多边形做正多面体的面，正多边形的内角就成为正多面体的多面角的面角. 我们知道，一个多面角的面数至少是三，并且它的各面角的和必须小于 360°，而正 n 边形的每个内角等于$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. 因此，正多面体的种类就有一定的限制. 现在我们研究如下:

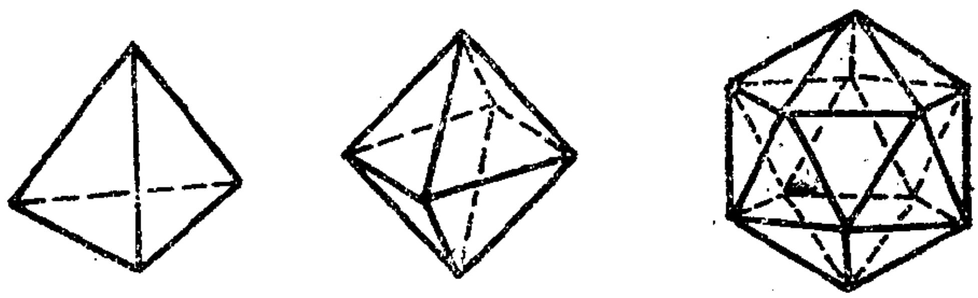
1. 用正三角形做面.

正三角形的每一个内角等于 60°. 用 3、4、5 乘 60° 所得的结果都小于 360°, 而用 6 或大于 6 的整数乘 60° 所得的结果就等于 360° 或大于 360°, 所以各个面角是 60° 的多面角只能是三面角、四面角和五面角, 而不能是六面角或面数大于六的多面角. 因此, 用正三角形做面的正多面体只能有下列三种:

1) 正四面体　它的每个面都是正三角形, 每个多面角都是三面角(图 3-7 甲).

2) 正八面体　它的每个面都是正三角形, 每个多面角都是四面角(图 3-7 乙).

3) 正二十面体　它的每个面都是正三角形, 每个多面角都是五面角(图 3-7 丙).



甲　　乙　　丙

图 3-7

2. 用正方形做面.

正方形的每一个内角等于 90°, 用 3 乘 90° 所得的结果小于 360°, 而用 4 或大于 4 的整数乘 90° 所得的结果就等于 360° 或大于 360°, 因此各个面角是 90° 的多面角只能是三面角. 所以, 用正方形做面的正多面体只能有下面一种:

4) 正六面体(正方体)它的每个面都是正方形, 每个多面

角都是三面角(图 3-8).

3. 用正五边形做面.

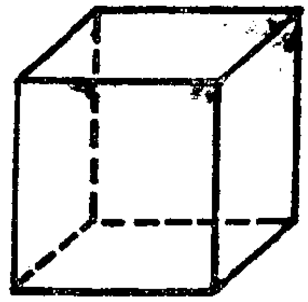


图 3-8

正五边形的每一个内角等于 108°. 用 3 乘 108° 所得的结果小于 360°, 用大于 3 的整数乘 108° 所得的结果就大于 360°, 因此各个面角是 108° 的多面角只能是三面角. 所以, 用正五边形做面的正多面体只能有下面一种:

5) 正十二面体 它的每个面都是正五边形, 每个多面角都是三面角(图 3-9).

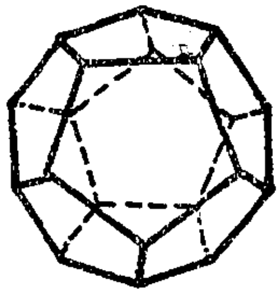


图 3-9

正六边形的每个内角等于 120°. 用 3 乘 120°, 所得的结果等于 360°. 因此每个面角是 120° 的多面角是不存在的. 边数大于 6 的正多边形的内角都大于 120°, 每个面角都大于 120° 的多面角也不存在. 由此可知, 正多面体只能有上述五种.

正多面体	顶点数	面　数	棱　数
正四面体			
正六面体			
正八面体			
正十二面体			
正二十面体			

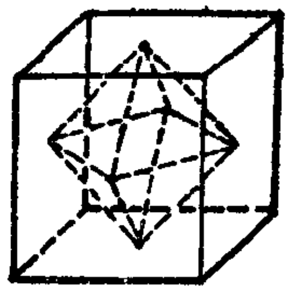
数一数每种正多面体的顶点数、面数、棱数，分别填在上面的表格内.

再研究五种正多面体的顶点数加面数减棱数，所得的结果有什么规律？

练　习

1. 以正六面体的各面中心为顶点作成多面体，看它是不是正八面体？

2. 设正四面体的棱长是 a，求它的全面积.



(第 1 题)

3.4　多面体的变形

我们考虑任意一个多面体，例如正六面体，假定它的面是用橡胶薄膜做成的. 如果充以气体，那么它就连续变形(但不破裂)，最后可变为一个球面(图 3-10).

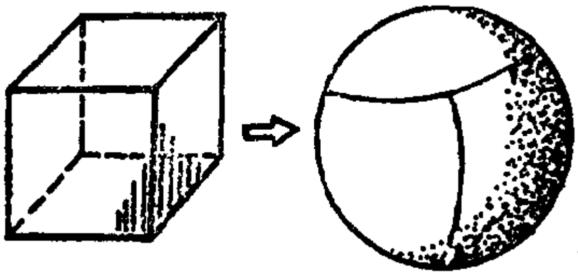


图　3-10

象这样，表面连续变形，可变形为球面的多面体叫做简单多面体. 棱柱、棱锥、棱台、正多面体、凸多面体都是简单多面体.

下面用变形的方法研究简单多面体的顶点数 V、棱数 E

和面数 F 之间有什么关系．我们用一个四面体的表面 $ABCD$ 来说明．将它的一个面 BCD 去掉，再使它变形为平面图形(图 3-11)．这时，四面体的顶点数 V、棱数 E 与剩下的面数

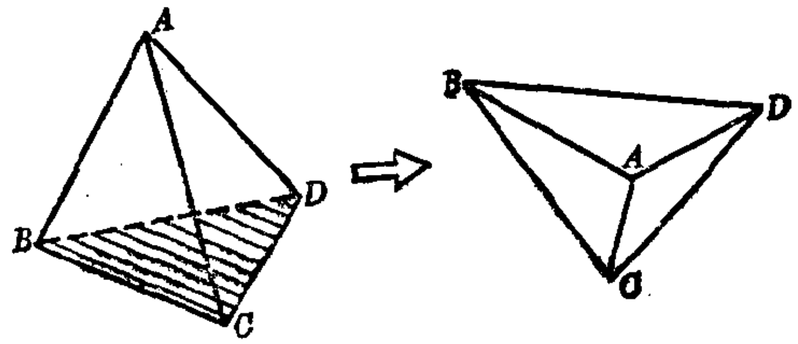


图 3-11

F_1，变形后都没有变．因此，要研究 V、E、F 之间的关系，研究平面图形即可．

我们来研究

$$V+F_1-E$$

的数值．分下面两步进行：

1．去掉一条棱，例如 BC，就减少一个面 ABC．同理，去掉棱 CD、BD 时，也都随着各减少一个面 ACD、ABD，如图 3-12，由于 F_1-E、V 的值都不变，因此，$V+F_1-E$ 的值不变．

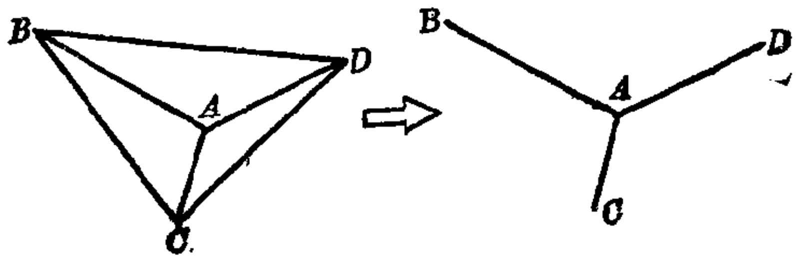


图 3-12

2．再从剩下的树枝形，去掉一条棱，例如 CA，则减少一个顶点 C．同理，去掉棱 DA 随着减少一个顶点 D，最后剩

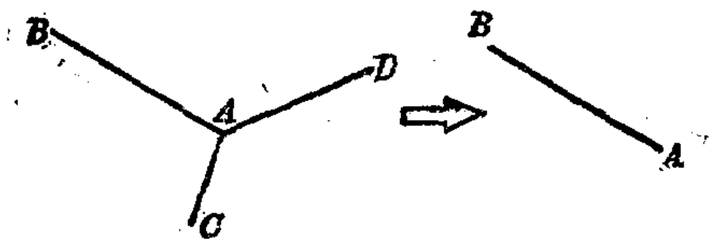


图 3-13

下 AB(图 3-13). 在此过程中 $V-E$ 的值都不变. 但这时因为面数 F_1 都是 0, 所以, $V+F_1-E$ 的值也不变. 由于最后只剩下 AB, 因此

$$V+F_1-E=2+0-1=1.$$

最后, 加上最初去掉的一个面, 得到

$$V+F-E=2.$$

因为对任意的简单多面体, 应用这样的方法, 最后都是只剩一个线段, 因而都得到上面的结果, 所以可以把它写成下面的定理:

定理 **简单多面体的顶点数 V、棱数 E、面数 F, 有下面的关系:**

$$\boxed{\boldsymbol{V+F-E=2.}}$$

这个定理叫做欧拉定理. 它表明 2 这个数是简单多面体表面在连续变形下不变的数.

例 一个凸多面体的面都是三角形, 求证: $F=2V-4$.

证明: 因为每个面为三条边, 每相邻两个面的两条边合为一条棱, 所以棱数 $E=\frac{3F}{2}$. 根据欧拉定理, 得

$$V+F-\frac{3F}{2}=2,$$

化简，得

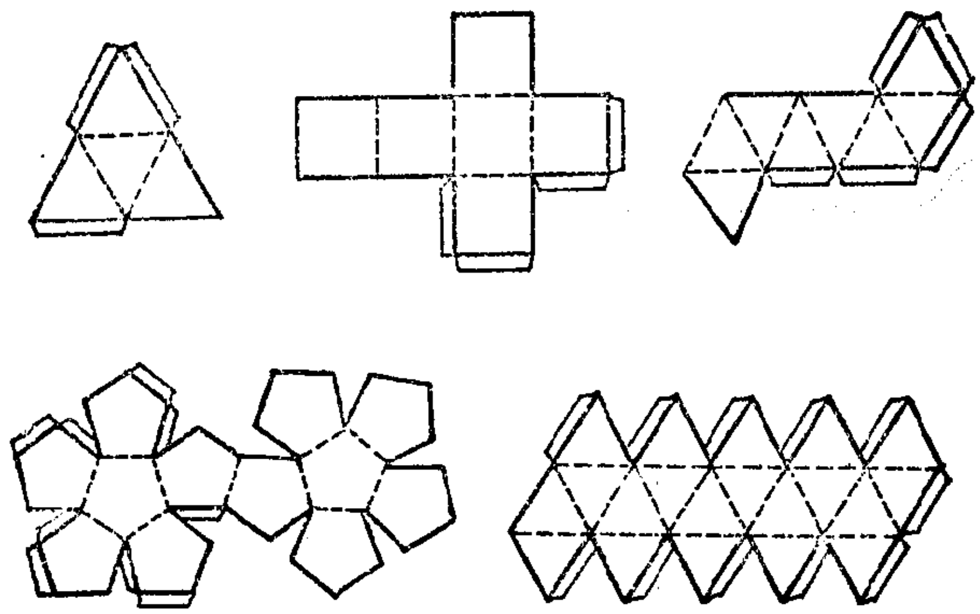
$$F=2V-4.$$

练　习

检查四棱柱、五棱锥、六棱台，看它们的顶点数、棱数、面数是否适合欧拉定理.

习题十九

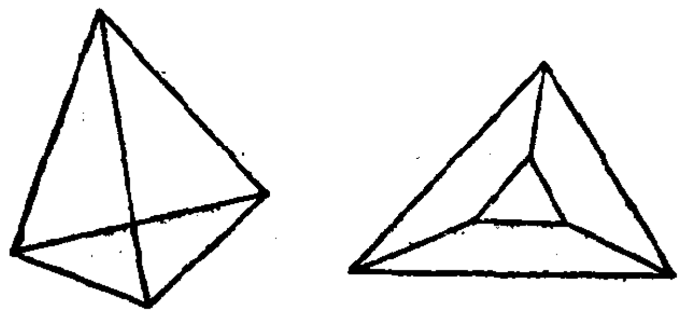
1. 用较厚的纸照图放大画好，剪下后沿虚线折叠，粘成五种正多面体的模型.



(第1题)

2. 求棱长为 a 的正八面体的对角线长.
3. 分别以正四面体的高和棱为一边作两个正方形，求证这两个正方形面积的比是 2:3.
4. 正八面体的棱长是 a，求以它的各面中心为顶点的正六面体的全面积.

5. 就下面平面图形验证 $V+F-E=1$.



（第 5 题）

6. 用五种正多面体验证欧拉定理.

7. 如果凸多面体的各面都是四边形，试证 $F=V-2$.

小 结

一、本章的主要内容是学习多面角的概念、性质，在此基础上研究正多面体，并用连续变形的方法证明简单多面体上的欧拉定理.

二、多面角的有关概念. 三面角是最简单的多面角，直三面角是三面角中最重要的一种特殊情形.

三、三面角和多面角的重要性质. 多面角的性质是在三面角的性质的基础上导出的:

1. 三面角的任何一个面角小于其它两个面角的和;

2. 多面角的所有面角的和小于 360°.

四、正多面体的概念以及由此推出正多面体只有五种: 正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体.

五、简单多面体的概念．它的表面在连续变形下的不变性质：欧拉定理($V+F-E=2$)．

复习题三

1. 在直三面角 $S\text{-}ABC$ 的三条棱上，取 $SA=SB=SC=a$，求：

   (1) 直线 AB 与 SC 的距离；

   (2) 点 C 与直线 AB 的距离．

2. 在一个正四面体内：

   (1) 求相邻两个面所成的二面角；

   (2) 求两条不相交的棱所成的角．

3. 求棱长是 a 的正八面体的体积．

4. 有相等体积的正四面体、正六面体、正八面体和球，它们的全面积哪一个最大？哪一个最小？

5. 设凸多面体有 V 个顶点，证明其面角和为 $(V-2)\cdot 360°$．

第四章　几何中的逻辑知识初步

一　逻辑思维的基本规律

形式逻辑是研究思维形式及其规律的学科．思维形式表现为概念、判断、推理和论证以及它们之间的联系．

思维形式的规律以同一律、矛盾律、排中律为基本规律．这三条规律各不相同，但互相之间有密切的联系．它们是正确思维与正确认识的必要条件．违反这些条件的思维和认识，必然是混乱的、不正确的．

4.1　同一律

所谓**同一律**，就是在我们思考某一对象的整个过程中，思考对象必须始终保持一致，在进行判断和推理过程中，每一个概念都必须在同一意义下使用，绝对不允许偷换．

同一律的公式是：A 就是 A．

例如，在平面几何中，我们说："两条直线不相交就互相平行"这是正确的，但是在立体几何中，这样说却是错误的．因为它把平面内的两条直线偷换成空间里的两条直线，而在空间里不仅存在相交的、平行的两条直线，还存在异面的两条直线．

又如，当 $x=ay$ 且 $a\neq 0$ 时，我们有

$$x^n-a^n=a^n(y^n-1),\ n \text{ 为自然数.} \tag{1}$$

又 $a^{n-1}(x-a)=a^n\left(\frac{x}{a}-1\right)$

$$=a^n(y-1). \tag{2}$$

因此，当 n 为任何自然数时，二项式(1)可以被（$y-1$）整除，又能被 $a^n(y-1)$ 整除．即(1)的右边能被(2)的右边整除．

如果设 $x=3$，$a=2$，$n=3$，则 $x^n-a^n=19$，$a^{n-1}(x-a)=4$．很显然 19 不能被 4 整除．

从数值来看，上面结论是错误的，但是从推理来看，是没有毛病的．问题何在呢？我们仔细检查一下，就可以看出：这是由于我们所用的"整除"这个概念，用于多项式运算与用于自然数运算是完全不同的两个概念：一个多项式除以另一个多项式，余式为零就叫做"整除"；而一个自然数除以另一个自然数，必须余数为零，而且商是整数才能叫做"整除"．显然产生矛盾的原因是由于将多项式"整除"的概念偷换成自然数"整除"的概念的缘故．

4.2 矛盾律

所谓矛盾律，就是我们思考某一对象的过程中，在同一时间内和同一条件下，不能把这个对象看作是与它本身不同的别的东西．也就是说，同一对象，在同一时间和同一条件下，不应该具有两种互相矛盾的属性．

矛盾律的公式是：A 不是 $\overline{A}$（非 A）．

公式中的 A 和 $\overline{A}$ 是互相矛盾的．违反矛盾律的错误就在于自相矛盾．因此，我们在思考问题时，必须防止自相矛盾．

例如，在比较两个量 x、y 的大小时，不能既说 $x>y$，又说 $x\leqslant y$；在讨论棱台时，不能说它又是棱台，它又完全具有圆台的属性．在研究两个三角形时，不能既说它们是全等形，又说它们不全等，……．可见，“矛盾律”就其实质来说应该叫做“不矛盾律”．不过历史上一直惯用“矛盾律”这个名称．

应当注意，矛盾律公式中的“A”与“$\bar{A}$”虽是一对矛盾的事物，但“$\bar{A}$”可用它的一部分来代替．例如，$x>y$ 与 $x\leqslant y$ 是矛盾的，$x\leqslant y$ 可用它的部分 $x<y$ 或 $x=y$ 代替；“直角”与“非直角”是矛盾的，“非直角”可用“锐角”或“钝角”来代替，这在逻辑上是允许的，它符合矛盾律的意义．

最后指出，矛盾律和同一律是直接联系着的．“A 不是 $\bar{A}$”就是“A 就是 A”的否定形式．这就是说，矛盾律不过是用否定的形式表现，而同一律却以肯定的形式来表现同一事物的．

4.3 排中律

所谓排中律，就是对于同一对象，在同一时间和同一条件下，或者肯定它有某种属性，或者否定它有某种属性，二者之间总有一个是正确的，而另一个是错误的．不可能有第三种情况．或者说，任何思想反映客观对象时，它或者是真的，或者是假的，二者必居其一，不能有第三者居中的情形．

排中律的公式是：**或者是 A 或者是 $\overline{A}$**．

例如，

1．这个梯形是等腰梯形；

这个梯形不是等腰梯形．

2. 平面α垂直于平面β;

平面α不垂直于平面β.

以上各例中的两个事实，都必有一个是正确的，一个是错误的，没有第三种情况存在.

同一律、矛盾律和排中律这三条形式逻辑的基本规律虽然各不相同，但它们之间的关系是非常密切的. 同一律的内容是：如果一个事物是真实的，那么它就是真实的；可以运用“如果……，那么……”来表达. 矛盾律的内容是：任何事物不能既是真实的，同时又是虚假的；可以运用“不是……，就不是……”来表达. 排中律的内容是：任何事物或者是真实的，或者是虚假的；可以运用“要么……，要么不……”来表达.

例如

用同一律表达命题，其形式如下：

1. 三角形如果是等腰三角形，那么它的两个底角相等；

2. 整数如果能被 2 整除，那么它是偶数.

用矛盾律表达以上命题，其形式如下：

1. 不是等腰三角形，它的任何两个角就不是相等的；

2. 不是能被 2 整除的数，就不是偶数.

用排中律表达以上命题，其形式如下：

1. 这个三角形要么是等腰三角形，要么它的任何两个角不相等；

2. 这个整数要么能被 2 整除，要么就不是偶数.

这三组命题虽然表达形式不同，很明显，它们的内容是相同的.

习题二十

1. 形式逻辑的基本规律是什么?
2. 试举出一个违反矛盾律的实例.
3. 举例说明同一律、矛盾律、排中律的异同.
4. 用三种不同形式表达下面的命题:

   (1) 直角三角形斜边的平方,等于两直角边的平方和;

   (2) 垂直于同一平面的两条直线互相平行.

二 概 念

4.4 属性与概念

在客观世界中,有许许多多的事物,每个事物,除了有许多的性质外,还与其他事物有一定的关系,我们把这种事物的性质与关系,都叫做事物的**属性**.

某类事物有很多的属性.在这些属性中,有些是某类事物的特有属性,有些却是某类事物的偶有属性.某类事物的**特有属性**,就是某类事物都具有而别的事物都不具有的那些属性.某类事物的**偶有属性**,就是某类事物中某些分子所具有但不是所有的分子都具有的那些属性.

例如,直角三角形的特有属性:有一个内角是直角,面积等于两直角边乘积的一半,斜边中点与三个顶点等距离,斜边的平方等于两直角边平方的和,……等等.但是,两直角边相等,一个锐角为另外一个锐角的二倍等,却是直角三角形的偶有属性.

在事物的特有属性中，又有些是本质属性，有些是固有属性.

某类事物的**本质属性**，就是对某类事物有决定性的特有属性；某类事物的**固有属性**，就是某类事物的本质属性派生的特有属性. 例如，直角三角形的本质属性是有一个内角为直角的三角形. 它的固有属性是由此而派生的特有属性. 如面积等于两直角边乘积的一半，斜边中点与三个顶点等距离，斜边的平方等于两直角边平方的和，……等等. 因为由前者可以推出后者来，前者是有决定性的特有属性，而后者是派生的特有属性.

概念是人脑的高级产物，是在感性认识的基础上，进行比较、分析、综合、抽象和概括，抛弃事物的那些非本质的属性，将本质属性集中起来而形成的. 所以，概念具有抽象性；又由于概念所反映的本质属性是一类事物普遍具有的属性，所以，概念具有一定的普遍性.

由此可知：

概念是反映事物的本质属性的思维形态.

4.5 概念的内涵与外延

前面讲过，概念是反映事物的本质属性的思维形态. 概念在反映事物的本质属性的同时，也就反映了具有这些本质属性的事物. 这就形成了概念的内涵与外延两个方面.

概念的内涵：就是概念所反映的事物的一切本质属性的总和.

概念的外延：就是具有概念所反映的本质属性的一切事

物.

"菱形" 这个概念的内涵：它是"平行四边形"和"邻边相等"；这个概念的外延怎样表示呢？就是一切具体的菱形、正方形.

"三角形"这一概念的内涵是："三条首尾相接的线段"，它的外延是不等边三角形、等腰三角形、正三角形等.

概念的内涵与概念的外延是互相制约的. 概念的内涵确定了，在一定条件下概念的外延也跟着确定了；同时，概念的外延确定了，在一定条件下概念的内涵也跟着确定了. 在内涵与外延的互相制约的关系中，有一点特别值得我们注意，这就是概念内涵的多少与概念外延的多少这二者之间存在反变关系.

如果一个概念 A 的内涵比另一个概念 B 的内涵多，那么，A 的外延就比 B 的外延少；同时，如果 A 的内涵比 B 的内涵少，那么 A 的外延就比 B 的外延多.

这就是概念的内涵与外延的反变规律，或者叫做**反比规律**（这个反比的概念与数学中的概念不同）.

例如在"长方体"这一概念的内涵中增加"相邻的三条棱相等"这一属性，就得到"正方体"的内涵，这时正方体的外延缩减为只是长方体的外延中所有正方体的那一部分.

根据概念内涵与外延的反变规律，我们可以用它来限制或扩大概念，这对于我们准确地运用概念是很有帮助的.

4.6 概念的种和类

我们知道，"长方体"和"正方体"这两个概念的外延是有

大小的，"长方体"这一概念的外延包含了"正方体"这一概念的外延．这时，我们把"长方体"这一概念叫做"正方体"这一概念的种概念，把"正方体"这一概念叫做"长方体"这一概念的类概念。

一般地，若概念 A 的外延包含概念 B 的外延，我们把概念 A 叫做概念 B 的种概念(简称种)，把概念 B 叫做概念 A 的类概念(简称类)．

假如我们把种概念"长方体"的外延分成三个部分："正方体"，"相邻两棱相等的长方体"和"相邻三棱都不相等的长方体"．显然，表示这三类的概念都是"长方体"这一概念的类概念．其中正方体这个类具有不同于其他两个类的属性，我们抓住这个不同的特征，可使它们区别开来，并且，叫它为"正方体"的类征．一般情况下，类征就是概念的本质属性．

应该注意：概念的种和类是相对的．例如"平行四边形"对"四边形"来说它是类概念，而对"矩形"来说它却是种概念；它们又是相互依存的．即单独一个概念不存在种和类的问题．概念的种和类只存在于它们的外延有包含关系的两个概念之间．例如"矩形"和"菱形"这两个概念的外延之间不存在包含关系，那么这两个概念之间就不存在种和类的关系．概念的种和类虽然反映了全体和部分的关系，但它只反映两个概念的外延之间的全体与部分的关系，而并不反映某类对象中那个具体对象的全体和部分的关系．例如一个数的对数是由首数和尾数两部分组成的，但首数和尾数并非对数这一概念外延中的一部分，因此它们都不是对数这一概念中的类．只有"常用对数"和"自然对数"才是"对数"这一概念的类概念．

4.7 概念的定义

任何一门学科中，都有许多有关的概念．为了保证我们对表示这些概念的名词或术语有正确的理解，就必须给这些名词、术语相应的概念下定义．具体说，下定义就是揭示概念的内涵的逻辑活动．通俗地说，就是明确规定一个概念的含义．

例如，直角三角形是有一个角是直角的三角形．

这个定义揭示了"直角三角形"这个概念的内涵．也就是揭示概念所反映的事物的本质属性．揭示概念的内涵，也就是揭示概念所反映的事物的本质属性．因此，我们说：

定义是揭示事物的本质属性的逻辑方法．

我们是根据概念的种和类之间的关系，来给概念下定义的．一般地，在给概念下定义时，我们只须指出被定义概念最邻近的"种"是什么，再确定足以表示与它并列的概念（类概念）不同的本质属性（类征），而不必列举对象的其他一切属性．通常把这种定义的方法用公式来表示：

$$概念的定义=种+类征.$$

并称它为**种加类征式的定义方法**．例如：

1．我们定义平行四边形是两组对边分别平行的四边形．

在这里"四边形"是"种"，"平行四边形"是"类"，"平行四边形"是我们要定义的新概念，"两组对边分别平行"是类征，目的是要把平行四边形与其他四边形区别开来．

2．正多边形（被定义概念）是各角相等，各边也相等（类征）的多边形（种）．

3．直棱柱（被定义概念）是侧棱垂直于底面（类征）的棱

柱(种).

对同一概念，有的可以有几种不同的定义法，这都是由于选择不同的“种”概念或不同的“类征”而产生的．例如，对于正方形的定义，有：

正方形(被定义概念)是四条边都相等(类征)的矩形(种)；

正方形(被定义概念)是四角都相等(类征)的菱形(种).

前者以矩形为种定义正方形，后者是以菱形为种定义正方形.

几何中有的定义，虽然同样地含有种和类征，但是在文字上没有明显地把它指出来，必须仔细分析才能确定．例如，

球面(被定义概念)是一个半圆以它的直径为轴，旋转一周(类征)所成的曲面(种).

象这种定义方式，叫做**发生式定义**．它也符合种加类征的公式．只不过类征是指出被定义概念是怎样发生的，类征所描述的本质属性是被定义概念的发生过程．如“轨迹图形”、解析几何学里定义的“圆锥曲线”、立体几何里定义的“旋转体”等都是这样定义的.

对于定义：偶数(被定义概念)就是能被 2 除尽(类征)的整数(种).

这里类征是“能被 2 整除”，它表示的是偶数与 2 的一种关系.

这说明定义的类征，也可以是事物与事物的关系．因此，我们可以用事物的关系作为类征而写出定义.

种加类征的定义公式用得很广，但是有它的局限性．采

用这种方式下定义，必须引用前面已知的旧概念来确定新概念，这样追溯上去，当类的概念一级一级地扩大时，最后必有最大的类．对于最大的类，就没有任何一个种能包含它了．因此，任何一门科学都必须选择一些不定义的概念，作为对其他概念下定义的起点．这样的概念，叫做**原始概念或基本概念**．如几何中的“点”、“线”、“面”、……等等．基本概念的属性一般通过描述的方法来揭示．

一个正确的定义，必须遵守以下几条规则：

1．**定义不能是循环的**，即如果概念 A 是用概念 B 定义的，那么概念 B 就不能用概念 A 来定义．也就是说，在定义一个新概念时，只能利用已知的旧概念．

例如，“直角是含有 90 度的角”与另一条定义“1 度的角是直角的 $\frac{1}{90}$”．

这是一种定义间的循环性错误，前者是用度来定义直角，后者是用直角来定义度．这是不能允许的．

2．**定义一般不应是否定的**．这就是说，下定义一般是要说明被定义的对象是什么，而不应当说对象不是什么．

例如：合数是非质数的整数．

多边形是不是圆形的图形．

这类定义之所以要不得，是它没有把被定义的对象的本质属性都揭示出来．但是，它如果能真正揭示对象的本质属性，却还是可用的．

例如：两个平行平面就是没有公共点的两个平面．

3．**定义应当简单明确，不能含混不清，也不能用比喻．**

定义不够明确的概念不能起明确被定义概念的作用．比喻虽然有丰富的形象感，但是不能准确地揭露事物的本质属性．

例如，三角形是多边形中最简单的一种图形．

球是象皮球那样的几何体．

这样的定义是不允许的．

4．**定义应该是相称的**．也就是说，定义概念的外延与被定义概念的外延必须是一致的，因而两者可以易位．

“直径是圆的弦”．这个定义是错误的，因为直径的外延比“圆的弦”的外延小，易位后成为“圆的弦是直径”，这显然是错误的．如果说“直径是过圆心的弦”这样就对了，易位后成为“过圆心的弦是直径”也是正确的．所以用易位法可以检验定义的相称与否．

4.8 概念的分类

概念有内涵与外延两个方面．要使一个概念明确，就必须使概念的内涵明确，同时也必须使概念的外延明确．前面所讲的定义，是明确概念的内涵的逻辑方法．现在要讲的概念的分类，是明确概念的外延的逻辑方法．

当一个概念的外延有许多的甚至是无限的事物的时候，要明确这样的概念的外延，我们就不能用一一列举这个概念所表示的事物的办法．但是，我们可以用分类的办法．

分类就是把一个概念的外延分为几个小类的逻辑方法．

例如：我们把三角形按角分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形三类．

我们把锥体分成棱锥和圆锥两类.

这样,经过分类我们对“三角形”、“锥体”这两个概念就进一步明确了. 所以,分类是明确概念的外延的逻辑方法.

概念分类的标准,可以是一个属性, 也可以是几个属性,分类的标准究竟采取哪些属性是根据需要来决定的. 例如三角形的分类,可以按角分类,也可以按边分类.

在分类的结果中,所得到的各个概念,又可以根据某一属性再分类,如此继续下去,可以得到一个复杂的概念体系.

例如,平行六面体可分类如下:

- 平行六面体
  - 直平行六面体
    - 长方体
      - 正方体
      - 非正方体
    - 非长方体
  - 非直平行六面体

对概念进行正确的分类, 可以帮助我们弄清概念之间的联系和区别,可以使我们的知识系统化,并能促进我们逻辑思维的发展.

为了使分类正确, 除了具备关于被分概念外延的完备知识以外,还要遵守以下分类的规则:

1. 所分的各个类应当互不相容.

所谓互不相容,就是说,各个类之间都有全异关系. 否则就会有一些事物既属于这个类又属于另一个类. 例如:

把平行四边形分为:“菱形”、“矩形”和“非菱形又非矩形”的其他平行四边形三大类,是不符合互不相容这一要求的. 因为菱形的概念里包含着正方形;矩形的概念里也包含正方形. 这叫两个类不是全异的. 象“正方形”那样,它既属于“菱形”,

又属于“矩形”. 这种分类称为犯有“类相容的错误”.

2. **各类的和必须全等于原来的种.**

所谓各类之和全等于原来的种, 也就是说任何一个属于原来的种的事物都属于一个类. 例如: 把“有理数分为正有理数和负有理数两类”. 这种分法出现了有理数中的“零”, 它既不属于正有理数, 又不属于负有理数的毛病, 这叫做犯有“类不全等于原来的种的错误”.

请同学们再分析: 把“两圆的位置关系分为两圆外离、两圆相交、两圆内离这三种关系”. 错在哪里.

3. **必须按同一分类标准进行分类.** 例如: 我们按角作标准把三角形分为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形, 这样把三角形分为三个类. 如果不是这样, 却是分为等角三角形、二等边三角形、不等角三角形, 这就不是按同一标准分类了. 这样分类使各个类之间的关系含混不清.

习题二十一

1. 什么是概念的内涵?举一例说明;
   什么是概念的外延?举一例说明.
2. 怎样给概念下定义?举一例说明.
3. 下列各句所表达的定义, 是否正确?如果有错误, 错误的原因是什么?
   (1) 偶数是由奇数加 1 而成的数.
   (2) 圆锥是尖的物体.
   (3) 棱柱是不是圆柱的柱体.
4. 找出下列定义的种和类征.

(1) 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.

(2) 用同一长度去量两条线段,所得的两个长度的比,叫做两线段的比.

(3) 两圆只有一个公共点的位置关系,叫做两圆相切.

5. 下面的分类是否正确?

(1) 梯形分为等腰和不等腰的两类.

(2) 空间直线和平面的位置关系有平行、相交、垂直三类.

(3) 空间平面和平面的位置关系有平行和相交二类.

三 命 题

4.9 判断和命题

人们在实践的基础上形成了许多概念以后,又常要应用这些概念,去断定客观的事物情况,作出肯定或否定的回答.这种回答通常叫做判断.

在研究几何图形的过程中,经常要对图形的性质或某种关系作出肯定或否定的判断,例如:

1. 所有的直角都相等.

2. 如果两个三角形的两边和夹角对应相等,那么这两个三角形全等.

3. 过半径的端点不与半径垂直的直线,不是这圆的切线.

4. 平面的垂线不与该平面平行.

这都是对几何图形的性质或某种关系所作出的判断.它是由某些几何概念组成的,表明了概念与概念之间的联系.即

表达了我们所研究的对象具有某些属性.或不具有某些属性.总之，**判断**是肯定或否定某对象是否具有某种属性的思维形式.

判断不仅有肯定与否定的两种形式，而且有正确与错误之分. 上述1、2是肯定的判断；3、4是否定的判断，而且都是正确的. 如果我们说："同位角都相等"这就是一个错误的判断.

每一个判断，都要用一个完整的句子来表示. 从语法上看，判断一般由"主语"、"谓语"和"联系词"三部分构成. 主语表示我们思考的对象，谓语表示对象所具有的属性. 联系词是表示主语和谓语之间的关系. 我们常用"是"或"不是"来肯定或否定对象所具有的属性.

几何中的判断通常叫做**命题**. 例如，公理、定理、推论、例题、习题等都是命题，公式也可以看做是用符号的形式来表示的命题. 几何中的命题一般叫做**假言判断**.

每个几何命题从结构上分析，是由两个部分组成，即条件(假设)部分和结论(终结)部分，它表明图形具有的因果关系. 它的形式可写为："如果……(条件)，那么……(结论)."如果用A表示条件，用B表示结论，就可以写成：

如果有A，那么有B. 或者$A\Longrightarrow B$.

有时有些命题它的条件含有若干个判断，有的终结也含有几个判断. 例如：

1. 如果四边形的两条对角线互相垂直平分，那么四边形是菱形.

(这个命题有两个已知条件).

2. 如果连结三角形两边的中点，那么连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

（这个命题有两个结论）.

几何命题与判断一样，有真（正确）有假（错误），这都要经过严格的逻辑证明.

4.10 命题的四种形式和关系

前面我们讲了命题，特别举出一些几何命题. 从这些命题叙述的语气考虑，有肯定语气的命题和否定语气的命题两种. 一个肯定语气的命题，以否定语气叙述时就得到了另一个命题；再把这两个命题的条件和结论交换位置又可以得到两个不同的命题. 所以，命题有四种形式，即原命题、逆命题、否命题、逆否命题. 现在举例来说明：

原命题：如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

逆命题：如果两个角相等，那么这两个角是对顶角.

否命题：如果两个角不是对顶角，那么这两个角不相等.

逆否命题：如果两个角不等，那么这两个角不是对顶角.

如果撇开命题的具体内容，只从它的结构形式来研究，以上四种命题可以简单表示为

原命题：如果有 A，那么有 B，或 $A \Longrightarrow B$.

逆命题：如果有 B，那么有 A，或 $B \Longrightarrow A$.

否命题：如果没有 A，那么没有 B，或 $\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$.

逆否命题：如果没有 B，那么没有 A，或 $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$.

我们容易看出四种命题之间还有下面的相互关系，如图 4-1 所示：

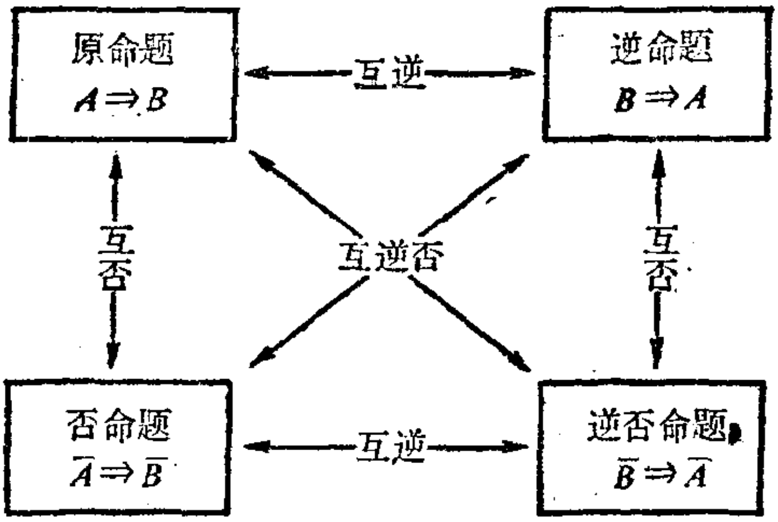


图 4-1

由于判断有真有假，所以，命题也有真有假，那么上述四种命题之间的真假关系如何？看以下几个例子.

例 1 原命题：平面上的直线，如果垂直于斜线，那么它垂直于斜线在平面上的射影.（真）

逆命题：平面上的直线，如果垂直于斜线在平面上的射影，那么它垂直于斜线.（真）

否命题：平面上的直线，如果不垂直于斜线，那么它不垂直于斜线在平面上的射影.（真）

逆否命题：平面上的直线，如果不垂直于斜线在平面上的射影，那么它不垂直于斜线.（真）

例 2 原命题：能被 9 整除的整数都能被 3 整除.（真）

逆命题：能被 3 整除的整数都能被 9 整除.（假）

否命题：不能被 9 整除的整数都不能被 3 整除.（假）

逆否命题：不能被 3 整除的整数都不能被 9 整除.（真）

同学自己研究关于"对顶角相等"这四种命题的真假.

由以上几个例子可知：成互逆或互否的两个命题，不一定

同真同假，但互为逆否的两个命题，真则同真，假则同假。

这种真则同真，假则同假的两个命题叫做**等价命题**。

因此，原命题与它的逆否命题是等价的，原命题的逆命题与否命题是等价的。

在明确了上述命题的等价性之后，要证明一个数学命题时，可以用证明和它等价的命题来代替，这对数学命题的证明就多了一条思路。

4.11 充要条件

几何命题是由条件与结论两部分组成的，它表示条件与结论之间的某种关系。某一事物情况的发生与存在，会促使另一事物情况的发生与存在，或某一事物情况的不发生与不存在，也会促使另一事物情况的不发生与不存在。事物之间的这种关系，叫做**条件关系**。其中有充分条件，必要条件和充要条件等关系。

我们来研究下列几个具体问题：

在同圆或等圆中，如果两弧相等，那么它们所对的弦也相等。

象这样，我们就说"两弧相等"是"所对弦相等"的**充分条件**。

又如，如果一条直线垂直于平面内两条相交直线，那么它垂直于这个平面。

同样，我们说："垂直于平面内两条相交直线"是"垂直于这个平面"的充分条件。

一般地，如果A成立，那么B成立，即$A \Longrightarrow B$，这时我们

说条件 A 是 B 成立的充分条件，"充分"也就是说，为使 B 成立，具备条件 A 就足够了。

再来研究以下几个例子：

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的弧也相等。

象这样，我们就说"所对的弧相等"是"两条弦相等"的必要条件。

又如，如果不在平面内的一条直线平行于平面内的一条直线，那么它平行于这个平面。

同样，我们说："一条直线平行于这个平面"是"它平行于平面内的一条直线"的必要条件。

一般地，如果 B 成立，那么 A 成立，即 $B \Longrightarrow A$。这时我们说，条件 A 是 B 成立的**必要条件**。也就是说，要使 B 成立，就必须有条件 A。

根据一个命题与它的逆否命题等价的关系。当 $B \Longrightarrow A$，条件 A 是 B 成立的必要条件，可以改变为另一种形式表示。即 $\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$。

也就是，如果 A 不成立，那么 B 就不成立，因此，我们可以说，这时条件 A 是 B 成立的必要条件。

综上所述，我们看到，如果 $A \Longrightarrow B$，那么 A 是 B 成立的充分条件；如果 $B \Longrightarrow A$，那么 A 是 B 成立的必要条件。

但有时既有 $A \Longrightarrow B$，又有 $B \Longrightarrow A$，那么 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件。这时，我们就说 A 是 B 成立的**充分而且必要的条件**，简称**充要条件**。

例如，在同圆或等圆中，"两条弧相等"是所对的"两弦相

等”的充要条件.

“不在平面内的一条直线平行于平面内的一条直线”是“它平行于这个平面”的充要条件.

应该注意,有些条件是充分条件,但不是必要条件;也有些条件是必要条件,但不是充分条件.

例如:$x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件,但不是必要条件.因为要使 $x^2=y^2$ 成立,不一定要有 $x=y$,有 $x=-y$ 也就可以了.

又如:两个三角形面积相等是它们全等的必要条件,但不是充分条件.因为得出两个三角形全等,只有面积相等是不够的.

习题二十二

1. 把下列各命题作为原命题,写出他们的逆、否、逆否命题,并辨别真假.

   (1) 棱台不是棱锥.

   (2) 全等多边形是相似多边形.

2. “四边相等”是“一个四边形是正方形”的什么条件?为什么?

3. “对角线互相平分”是“菱形”的什么条件?

4. “两边相等”是“正三角形”的什么条件?

5. “一组对边平行”是“梯形”的什么条件?

6. “m 是有理数”是“m 是实数”的什么条件?

7. “相似三角形”是“全等三角形”的什么条件?

8. “两条直线不相交”是这两条直线异面的什么条件?

9. “两个平面垂直”是“一个平面过另一个平面的垂线”的什么条件？

10. “空间两平面不相交”是“这两平面平行”的什么条件？

四 推理和证明

4.12 演绎推理

推理是根据一个或几个判断得出另一个判断的思维过程．我们把已知的判断叫做“**前提**”，而那个新的判断叫做“**结论**”．一个具体的几何推理是由作为前提的几个已知条件与作为结论的几何性质组成的．由于这样组成，它使我们可得到新的判断，从而可获得新的知识．

在几何中常用的推理有“演绎推理”与“归纳推理”．下面先研究演绎推理．

演绎推理是由一般到特殊的推理方法，三段论是演绎推理的主要形式．

三段论由三个判断组成，其中两个为前提，另一个判断是结论．

第一个判断是提供性质的一般判断，叫做**大前提**；第二个判断是和大前提有联系的特殊判断，叫做**小前提**；第三个判断是联合前两个判断，根据它们的联系做出的新判断，叫做**结论**．

例 1 任何两个边数相同的正多边形都是相似的，(大前提)

这两个正多边形的边数是相同的，(小前提)

所以，这两个正多边形也是相似的．(结论)

例 2　任何两个直角都相等.（大前提）

$\angle A$ 和 $\angle B$ 都是直角,（小前提）

所以 $\angle A$ 和 $\angle B$ 相等.（结论）

由此, 我们得出三段论的形式是:

一切 M 都是 P,（大前提）

S 是 M,（小前提）

所以, S 是 P.（结论）

这里反映了事物之间的关系, 即如果 M 包含于 P, 而 S 又包含于 M, 那么 S 包含于 P. 如图 4-2.

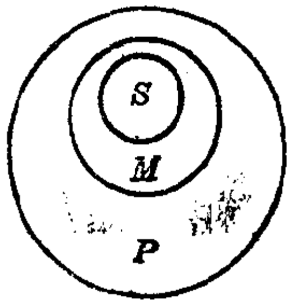


图　4-2

可见, 三段论的正确性依赖于大、小前提的正确性. 如果这两个前提都正确, 那么结论就正确.

数学的推理经常采用三段论, 为了叙述简单起见, 常把"三段论"中两个前提中的一个省去, 甚至只写结论.

例如, "这两个正多边形的边数相同, 所以, 它们是相似的." 在这里省略了大前提.

又如: 在几何论证中, 如果能从图形中明显可知 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 成对顶角, 那么也可以用以下的写法:

$\angle 1=\angle 2$.（对顶角相等）

这里省略了小前提, 而把大前提写在结论之后, 用括号加以区分.

我们中学阶段所学的几何学是用演绎体系整理的, 三段论是它常用的推理方法. 在演绎的过程中, 由于大前提中概

念的外延不断扩大，最后，在几何学中存在这样一类命题，它不可能由演绎推理得来，而是作为其他命题演绎推理的基础。这类作为推理基础的命题，叫做**几何公理**. 实际上，公理是为人们长期实践所证实的正确命题.

4.13 归纳推理

归纳推理或称归纳法，是从特殊到一般的推理方法.

归纳法一般分为不完全归纳法和完全归纳法. 从事物的一个或几个特殊情况作出一般结论的方法叫做**不完全归纳法**. 举例说明它的推理形式如下:

例 1 正三角形是内接于圆的;

正方形是内接于圆的;

正五边形是内接于圆的;

正六边形是内接于圆的.

因为正三角形、正方形、正五边形、正六边形都是正多边形,

所以，所有的正多边形都是内接于圆的.

例 2 设 $f(n)=n^2+n+41$.

当 $n=1$ 时, $f(1)=43$ 为质数;

$n=2$ 时, $f(2)=47$ 为质数;

$n=3$ 时, $f(3)=53$ 为质数;

因为 1、2、3……都是自然数.

所以对所有的自然数 n, $f(n)$ 都是质数.

上面的例 1 是正确的，但例 2 呢? 它是错误的，因为当 $n=40$ 时，$f(40)=40^2+40+41=40^2+40+40+1=41^2$，就不

是一个质数．由此可知，不完全归纳推理所得的结论可能正确，也可能不正确．

虽然，不完全归纳法的结论存在或然性，但是它在探求事物的规律时，能够提供线索，得出假设，再经过严格证明，可望得到一般真理，因此，它是人们用以探索真理时常用的方法之一．

由于不完全归纳法有比较直观、具体这一优点，所以易为小学生或中学低年级学生所接受．但是它有缺点，从少数特殊对象得出一般结论时，这个结论可能是不正确的．为了保证结论的可靠性，我们必须在考察所有的对象之后，再来得出一般结论．这种从列举对象的一切特殊情形的前提下，归纳得出关于全部对象的一般结论的推理方法叫做**完全归纳法**．由于完全归纳法考察了所有对象，所以，它的结论一定是可靠的．但是它只适用于所考察对象比较少的情形，如果所考察的对象很多时，特别要考察对象是无限时，我们就要借助于数学归纳法这一数学工具来解决．数学归纳法将在《代数与初等函数》第三册中讲授．

4.14　证明的意义、结构及规则

人们在日常生活及科学研究中，不仅需要作出各种判断，而且还需要根据一定的事实和理由来说明这些判断的真实性，这样，由一个或几个判断的真实性，进而断定另一个判断的真实性的逻辑方法叫做证明．在几何中，真实的前提或正确的判断就是几何的定义、公理、定理、法则等，以及命题中所给的已知条件．证明的结构包含三个组成部分．

1. **论题** 就是真实性需要加以证明的那个判断或命题.

2. **论据** 就是为了证明论题的真实性而引用的那些判断.

3. **论证** 就是引用论据证明论题的推理过程.

例 三角形三个内角的和等于 180°. [论题]

已知: △*ABC*(如图 4-3).

求证: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$. [论题]

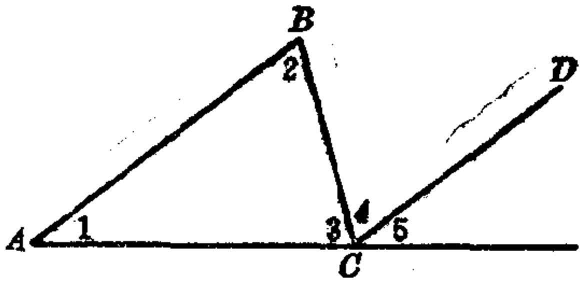


图 4-3

证明: (1) 延长 *AC*,

(2) 从 *C* 点作 *CD* ∥ *AB*, (过直线外一点可作该直线的一条平行线)

(3) $\angle 1=\angle 5$, (两直线平行, 同位角相等)

(4) $\angle 2=\angle 4$, (两直线平行, 内错角相等)

(5) $\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$, (平角的定义)

(6) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4+\angle 5$, (等量代换)

(7) $\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$. (等量代换)

从(1)至(7)后面圆括号内的都是论据.

上面例题是一个完整的证明过程, 可以清楚地看到证明和推理是有所不同的. 推理是从前提推出结论, 证明是首先确定了论题, 然后运用推理的方法去找相应的论据, 再从论据推出论题的结论.

由此可见, 证明是先有论题, 相当于已有了结论; 要找的是论据, 相当于前提, 即结论是已知的而论据是待求的. 而推

理是先有前提，相当于论据，要求的是结论，即前提(论据)是已知的，而结论是待求的．所以证明和推理的思考过程是朝着相反的方向前进的．

几何命题的证明一般用演绎推理，并且往往是一连串的推理，假如要证明论题 B 成立，就要找出可以推出 B 的论据 A_1．但发现 A_1 的正确性有待证明，于是又把 A_1 作为论题，找出可以推出 A_1 的论据 A_2．如果 A_2 的正确性也有待证明，又要找出它的论据．照此下去，直到最后找出 A_n，它的正确性无需加以证明为止．在写出证明时，往往从最后的论据 A_n 出发，循着与刚才找论据相反的方向逐步进行推理，最后推出 B，完成命题的证明．即

$$A_n \Longrightarrow \cdots\cdots \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow B.$$

因为每一步推理都是一个三段论式，所以整个证明由一连串三段论式复合而成．前提的正确性与结论的联系是必然的．

一个正确的证明必须遵守以下规则：

关于论题的规则：

1. **论题必须明确**．论题明确是证明的先决条件，它是我们需确认其为真实的判断．

2. **不能转移或偷换论题**．例如，我们要证明“四边形的内角和”不能把它改为证明“正方形的内角和”．

关于论据的规则：

1. **论据应当是确知为真的判断**．如果论据不真实，自然得不出论题的真实性．

2. **论据的真实性不能依赖论题的真实性**．论据的真实性依赖于论题的真实性叫做“循环证明”，这是不许可的．例如，

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 这个论题，通常是用勾股定理作为论据来进行证明的，如果在证明勾股定理时，又用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 作为论据，那就犯了循环证明的错误.

关于论证的规则:

论证是运用论据，一步一步地推出论题的思维过程. 前一步是后一步成立的充分条件. 否则就是论据不足.

4.15 直接证法与间接证法

我们要证明某个命题成立，或直接证明原命题成立，或间接证明它的等价命题成立. 前节讲的证"三角形三个内角的和等于 180°"的证法是直接证法. 它是从原命题所给的条件出发，根据已有的定义、公理、定理、法则，通过一系列的推理，一直推到所要证明的结论为止. 几何学中多数定理都是采用这种方法证明的，在这里就不再举例说明了.

有些命题往往不易用直接证法去证明. 这时，需要采用间接证法. 在几何学里间接证法常用的是反证法，就是从命题结论的反面入手，先假定结论的反面成立，由此假定出发，根据已有的定义、公理、定理、法则，推导得出的结果与原命题的已知条件矛盾；或与已知的定义、公理、定理相矛盾，这种矛盾的产生不是由于推理的错误，而是由结论的反面的假定不能成立而产生的，从而得到结论的正面是正确的. 这种证明的方法叫做反证法.

例 1 证明圆内两弦(非直径)相交不能互相平分.

已知：如图 4-4，⊙O 内的两弦 AB、CD 相交于 P.

求证：AB、CD 不能互相平分.

证明：假设 AB 与 CD 互相平分，

那么 P 点为两弦的中点.

又因为 AB、CD 不是直径，

所以 P 点不可能与圆心 O 重合.

连 OP，得圆心与弦的中点的连线.

所以 $OP \perp AB$，$OP \perp CD$.

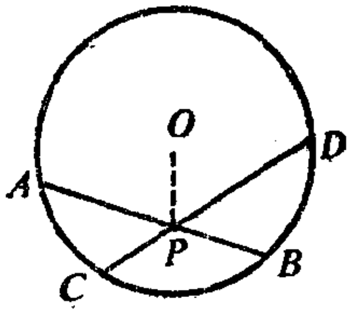


图 4-4

这与定理"过已知直线上一点有且仅有一条直线垂直于已知直线"相矛盾.

所以弦 AB 和 CD 不能互相平分.

本题的特点是，原命题的结论的否定事项只有一条．只要把这个否定条款推翻就可以肯定结论成立．这种比较简单的反证法又叫归谬法．如果命题结论的反面不只是一种情况时，就必须把结论的反面一一加以否定，才能说明原结论成立．这种反证法叫做穷举法.

例2 如果直线 a、b 既不相交又不平行，那么 a、b 两直线必异面.

已知：a、b 不相交又不平行.

求证：a、b 为异面直线.

证明：设 a、b 不为异面直线，即在同一平面内，则 a、b 相交或平行.

(1) 设 a、b 相交，这与已知矛盾．所以 a、b 不能相交.

(2) 设 a、b 平行，这与已知矛盾．所以 a、b 不能平行.

∴ a、b 两直线异面.

4.16 综合法与分析法

在思考证明命题的过程中，由于思考问题时思路的顺逆

不同，分为综合法与分析法.

从已知条件出发，通过推理，导出所给命题的结论的这种思考问题的方法叫做**综合法**.

从命题的结论出发，寻找结论成立的充分条件，如此逐步往前提追溯，一直追溯到已知条件为止的这种思考问题的方法叫做**分析法**.

例 如图 4-5. 已知$ABCD$是等腰梯形，过对角线交点O，作EF平行于AB. 求证 $EO=OF$.

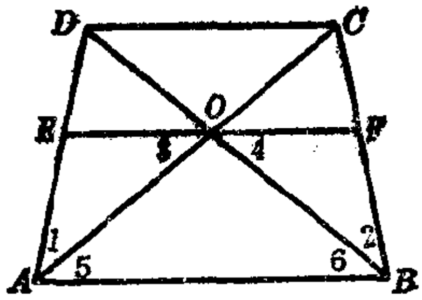


图 4-5

(1) 分析法:

a. 要证 $EO=OF$，可证$\triangle AOE\cong\triangle BOF$.

b. 要证$\triangle AOE\cong\triangle BOF$，只需证$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，及$AO=BO$.

c. 要证 $\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$ 及 $AO=BO$，可证 $\angle 5=\angle 6$.

d. 要证$\angle 5=\angle 6$，只需证$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

然而由已知条件易得$\triangle ABC\cong\triangle BAD$，于是命题得证.

(2) 综合法:

因为$\angle A=\angle B$，(等腰梯形两底角相等)

$AD=BC$，(已知等腰)

$AB=AB$，(公用)

所以$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

得到$\angle 5=\angle 6$.

又因为 $AO=BO$，(在三角形中，等角对等边)

$\angle 3=\angle 5=\angle 6=\angle 4$, (两直线平行，内错角相等)

$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore \quad \triangle AOE \cong \triangle BOF$. $(a、s、a)$

$\therefore \quad EO=OF$. (对应边相等)

几何证题可以用分析法，也可以用综合法，一般二者同时使用效果较好. 因为，分析法的思考是逆推的，较易找到证明途径，但叙述时措辞冗长；而综合法的思路是顺行的，叙述简便，条理较清楚，但有时不易找到证明途径. 因此，在证题时，如果一时不易用综合法证明时，就先用分析法找出证明途径，再使用综合法写出证明过程.

习题二十三

1. 什么叫三段论法？它的结构如何？试举一例说明.
2. 什么叫归纳法？它的结构如何？试举一例说明.
3. 三角形三边的长分别是 3cm、4cm、5cm，试用三段论推理，证明上述三角形为直角三角形.
4. 什么是完全归纳法？并举一个实际例子.
5. 什么是间接证法？并举两个实际例子.
6. 几何命题的证明必须遵守哪些规则？
7. 用反证法证明：过平面外一点只有一个平面和已知平面平行.
8. 什么叫分析法？什么叫综合法？对比说明.
9. 用分析法和综合法分别证明：等腰三角形两腰上的高角等.

小　结

本章的主要内容是:

一、逻辑思维的基本规律是同一律、矛盾律和排中律这三条基本规律.

同一律的公式是: A就是A.

矛盾律的公式是: A不是$\bar{A}$.

排中律的公式是: 或者是A, 或者是$\bar{A}$.

三条逻辑基本规律之间有密切的关系, 可以用它们来表示同一个判断.

二、每个事物都有许多属性, 事物的属性分为特有属性和偶有属性, 特有属性又可分为本质属性和固有属性.

概念是反映事物本质属性的思维形态. 它是事物的抽象, 表示的是一类事物的集合.

三、概念的内涵是指概念所反映的事物的本质属性, 外延是指具有这些本质属性的一类事物.

概念的内涵与外延是互相制约的. 概念内涵的多少与概念外延之间存在反变(反比)关系.

四、概念之间有种和类的关系, 但种和类是相对的.

定义是揭示概念内涵的逻辑方法. 几何中概念的定义通常是种加类征的定义形式. 定义要遵循以下四条规则:

(1) 定义不能是循环的;

(2) 定义一般不能是否定的;

(3) 定义应当简单明确, 不能用比喻;

(4) 定义应是相称的.

概念的分类是把一个概念的外延分为几个小类的逻辑方法. 分类的标准, 可以是一个属性, 也可以是几个属性. 但在一次分类中, 必须用同一个标准.

五、判断是对事物情况作出肯定或否定的思维形态. 几何判断是对几何图形的性质或关系作出肯定或否定的回答. 数学中的定义、公理、定理、定律、公式等都是判断, 统称为命题.

判断不仅有肯定与否定的形式, 而且有正确与错误的区别.

六、命题有四种形式:

(1) 原命题, $A \Longrightarrow B$;

(2) 逆命题, $B \Longrightarrow A$;

(3) 否命题, $\bar{A} \Longrightarrow \bar{B}$;

(4) 逆否命题, $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$.

互为逆否的两个命题真则同真, 假则同假. 具有这种关系的两个命题叫做等价命题.

七、充要条件

如果 $A \Longrightarrow B$. 我们说 A 是 B 成立的充分条件.

如果 $B \Longrightarrow A$ 或 $\bar{A} \Longrightarrow \bar{B}$. 我们说 A 是 B 成立的必要条件.

如果既有 $A \Longrightarrow B$, 又有 $B \Longrightarrow A$. 那么 A 是 B 成立的充要条件.

有些条件是充分条件, 但不是必要条件.

有些条件是必要条件, 但不是充分条件.

八、几何推理是根据一个或几个几何判断得出另一个判

断的思维过程. 一般分为演绎推理与归纳推理.

演绎推理是由一般到特殊的推理. 演绎推理的基础是形式逻辑中的三段论法.

归纳推理是以特殊情形为前提, 从而得到一般的推理方法. 归纳推理分为不完全归纳法和完全归纳法两类. 由不完全归纳法所得到的结论可能是正确的, 也可能是不正确的. 但是它在人类探求事物的规律时, 可以为我们提供线索, 所以它是人们发现真理的一种重要手段.

九、由一个或几个判断的真实性, 进而断定另一个判断的真实性, 这就是证明.

证明的结构包含论题、论据、论证三个组成部分.

证明同时也是推理, 但是推理不一定是证明. 当推理的前提不正确时, 这个推理就不是证明.

证明必须遵循以下几条规则:

(1) 论题必须明确;

(2) 在证明过程中论题不能转移或偷换;

(3) 论据必须真实, 而且不依赖论题;

(4) 在论证中论据要成为论题成立的充分条件.

十、证明方法可以分为归纳法和演绎法两类.

证明方法也可以分为直接证法和间接证法两类. 而间接证法主要是反证法.

由于思考问题时思路的顺逆不同, 证明方法还可以分为分析法和综合法两类.

复习题四

1. 用三条逻辑基本规律同时表达下列各命题:

   (1) 两直线被另一直线所截，内错角相等，则两直线平行;

   (2) 三角形两边的和大于第三边;

   (3) 平行于同一平面的两平面平行.

2. 概念的内涵是什么?概念的外延是什么?概念的内涵与外延有什么关系?并举例说明.

3. 说出棱台和正棱台的定义,并分别指出它们的种和类.

4. 给四边形进行分类.

5. 把下列命题作为原命题,分别写出它们的逆命题、否命题和逆否命题,并辨别其真假.

   (1) 在同圆或等圆中,等弧所对的圆心角相等;

   (2) 在三角形中,较大的边所对的角也大;

   (3) 正棱锥的侧面是全等的等腰三角形.

6. 在下列括弧中填写:"充分条件"或"必要条件"或"充要条件".

   (1) m 是实数是 m 是有理数的(　　);

   (2) $x^2-1=0$ 是 $x-1=0$ 的(　　);

   (3) $x=2$ 是 $x^2-5x+6=0$ 的(　　);

   (4) $x<5$ 是 $x<3$ 的(　　);

   (5) 内错角相等是两直线平行的(　　);

   (6) 矩形是平行四边形的(　　);

(7) 两边和夹角对应相等是两个三角形全等的(　　);

(8) 顶角平分线经过底边中点是等腰三角形的(　　);

(9) 一条直线垂直于平面内的两条相交直线是这条直线垂直于这个平面的(　　);

(10) 两个平面和第三个平面的交线互相平行是这两个平面平行的(　　).

7. 用反证法证明:

(1) 过平面内一点只能有平面的一条垂线;

(2) 圆的内接四边形的对角互为补角.

Document generated by Anna's Archive around 2023-2024 as part of the DuXiu collection (https://annas-blog.org/duxiu-exclusive.html).

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):
{
"filename": "MTA5ODczODkuemlw",
"filename_decoded": "10987389.zip",
"filesize": 7346177,
"md5": "88cebb1da62096d955b18b0a10a3bdd8",
"header_md5": "572bcde434071d6575f1b25950c44568",
"sha1": "05145423c5a0ad3717668de6a77a3723af218875",
"sha256": "9e6b768754ef522d70d89fe92497bbbcf94ad058b80edc8d827110d4d32a1490",
"crc32": 3577092807,
"zip_password": "",
"uncompressed_size": 7575097,
"pdg_dir_name": "\u255d\u2555\u2551\u256c\u2561\u250c\u2565\u2557\u2593\u00df_10987389",
"pdg_main_pages_found": 167,
"pdg_main_pages_max": 167,
"total_pages": 172,
"total_pixels": 567898240,
"pdf_generation_missing_pages": false
}